

# Calcoli perturbativi in QED e in QCD

Stefano Sinigardi

4 novembre 2009



## Introduzione

La maggior parte degli esperimenti in fisica subnucleare coinvolge lo scattering. Le teorie di campo che cercano di giustificare i risultati partendo da principi primi sono pertanto teorie che in primo luogo devono permettere di calcolare sezioni d'urto. Ma qui compare subito un problema: l'espressione esatta che dà origine a questi valori non è nota nemmeno per i processi più semplici. Il meglio che si possa fare è ottenere un'espressione formale come serie perturbativa e di essa calcolarne i primi termini. Ad aiutarci nell'operazione intervengono i diagrammi di Feynman, ciascuno dei quali rappresenta un pezzo dell'espressione precedente. In questo articolo vedremo come si utilizza questo metodo e quando è possibile applicarlo alle teorie dell'elettrodinamica e della cromodinamica quantistica.



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>I</b>
<b>1 L'ampiezza di transizione</b>	<b>1</b>
1.1 Le funzioni di Green . . . . .	2
1.2 L'integrale di percorso . . . . .	3
1.3 Il funzionale generatore . . . . .	6
<b>2 I diagrammi di Feynman</b>	<b>7</b>
2.1 Diagrammi di una teoria scalare . . . . .	7
2.1.1 La rivoluzione grafica . . . . .	8
2.2 Le regole di Feynman . . . . .	11
2.2.1 Le regole di Feynman per una teoria scalare reale au- tointeragente . . . . .	12
<b>3 L'elettrodinamica quantistica</b>	<b>15</b>
3.1 Le regole di Feynman della QED . . . . .	15
3.2 Alcune conseguenze dello sviluppo perturbativo della QED . .	17
3.2.1 La regolarizzazione . . . . .	17
3.2.2 Scattering elettromagnetico troncato al prim'ordine . .	17
3.2.3 La polarizzazione del vuoto . . . . .	20
3.2.4 La costante di accoppiamento . . . . .	20
<b>4 La cromodinamica quantistica</b>	<b>23</b>
4.1 La QCD e lo sviluppo perturbativo . . . . .	23
4.2 La lagrangiana QCD . . . . .	26
4.3 Le regole di Feynman per la QCD . . . . .	27

4.4	QCD perturbativa e QGP . . . . .	29
<b>A</b>	<b>La rappresentazione d'interazione</b>	<b>31</b>
A.1	Lo stato fondamentale nella rappresentazione di interazione . .	36
<b>B</b>	<b>Il teorema di Wick</b>	<b>41</b>
<b>C</b>	<b>Il propagatore del fotone e la libertà di gauge</b>	<b>43</b>
<b>D</b>	<b>Metodi di regolarizzazione</b>	<b>45</b>
D.1	La regolarizzazione con cut-off . . . . .	45
D.2	La regolarizzazione dimensionale . . . . .	48
D.3	Rinormalizzazione . . . . .	52
	<b>Bibliografia</b>	<b>53</b>

## L'ampiezza di transizione

A differenza di quanto avviene in meccanica classica, in meccanica quantistica, anche partendo da uno stato esattamente definito, non possiamo prevedere il risultato di un esperimento. Ciò che possiamo calcolare sono, più semplicemente, le ampiezze di transizione, che quantificano la sovrapposizione tra un certo stato finale e l'evoluzione dello stato iniziale: sono numeri complessi il cui modulo quadro dà la probabilità che quel preciso risultato sia raggiunto, tra i tanti accessibili. Da questi valori viene ricavata infine la sezione d'urto differenziale.

In teoria dei campi, similmente, dalle ampiezze di transizione si passa allo studio di operatori di evoluzione, che compongono la cosiddetta matrice  $S$ . Essi sono costruiti partendo da una Lagrangiana che rappresenta le particelle in esame e le interazioni che possono subire.

Un processo di scattering può essere descritto in questo modo: al tempo  $t \rightarrow -\infty$ , molto prima quindi che avvenga qualsiasi interazione, possiamo trascurare per definizione le interazioni e considerare le particelle come libere: lo stato  $|\psi(-\infty)\rangle$  è quindi un autostato dell'Hamiltoniana libera; lo rinomineremo per comodità in  $|i\rangle$ .

Al tempo  $t \rightarrow +\infty$ , molto dopo gli eventuali processi occorsi nell'interazione, possiamo pensare di ritrovare un altro stato costante, un altro autostato della teoria libera che chiameremo  $|f\rangle$ . Come abbiamo già visto, in generale sono accessibili più stati finali a partire dalle stesse condizioni iniziali. Denoteremo pertanto con  $|\psi(+\infty)\rangle$  la sovrapposizione delle varie componenti  $|f\rangle$  possibili.

Definiamo ora un operatore  $\hat{S}$  tale che

$$|\psi(+\infty)\rangle = \hat{S}|\psi(-\infty)\rangle = \hat{S}|i\rangle$$

Un elemento di questa matrice descrive pertanto l'ampiezza di probabilità di transizione da uno stato  $|i\rangle$  ad uno stato  $|f\rangle$ , in modo che possiamo scrivere

$$\langle f|\hat{S}|i\rangle = S_{fi}$$

La Lagrangiana che descrive la teoria interagente, però, a parte alcuni casi particolari<sup>1</sup>, non è mai trattabile analiticamente. Calcolare gli elementi di  $S$  si rivela pertanto essere estremamente complesso. Uno dei metodi di maggior successo per trattare alcuni problemi sfrutta le potenzialità dell'analisi perturbativa.

Classicamente, ci aspettiamo di poter sfruttare efficacemente una teoria perturbativa per descrivere piccole oscillazioni attorno ad un punto di equilibrio. Anche in meccanica quantistica questo principio resta valido, nonostante compaiano fenomeni come il tunneling che ne possono inficiare la praticità; in teoria dei campi, infine, la questione si complica ulteriormente: il punto di equilibrio, identificabile come stato fondamentale del sistema o stato di vuoto in seguito ad eventuali ridefinizioni, può essere instabile in alcune configurazioni per effetti che sono discussi in Appendice A.

Nonostante tutto, vedremo come la teoria perturbativa sia di fondamentale importanza per fare previsioni e verificare l'elettrodinamica quantistica (QED) e alcune applicazioni della cromodinamica quantistica (QCD).

Esistono diversi modi di applicazione degli sviluppi perturbativi. Uno dei primi studiati, basati sulla rappresentazione d'interazione, è riportato nell'Appendice A. Richard P. Feynman [1918-1988], nella sua tesi di dottorato, ideò il potente e rivoluzionario metodo dell'integrale sui cammini (Path Integral), poi sviluppato nel testo scritto con A. Hibbs del 1965 [2].

## 1.1 Le funzioni di Green

Definiamo come funzioni di Green (o funzioni di correlazione) i valori di aspettazione nello stato fondamentale del prodotto di operatori (di campo, nel nostro caso) ordinati temporalmente:

$$\langle 0|\phi(t_1)\phi(t_2)\phi(t_3)\dots\phi(t_N)|0\rangle \quad (t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_N)$$

Per estendere la definizione a tempi arbitrari, introduciamo il simbolo di ordinamento temporale  $T$  che agisce come segue:

$$T\phi(t_1)\phi(t_2) \equiv \begin{cases} \phi(t_1)\phi(t_2) & \text{se } t_1 \geq t_2 \\ \phi(t_2)\phi(t_1) & \text{se } t_2 \geq t_1 \end{cases}$$

---

<sup>1</sup>Si riescono a risolvere esattamente solo teorie di campo interagenti con massimo due dimensioni [1]



Possiamo allora definire la funzione di Green ad N tempi come

$$G_N(t_1, t_2, \dots, t_N) = \langle 0|T(\phi(t_1)\phi(t_2)\dots\phi(t_N))|0\rangle$$

La funzione di Green, nota anche come funzione di correlazione, rappresenta l'ampiezza di probabilità per una particella di propagarsi nell'intervallo di tempo rappresentato ( $|0\rangle$  rappresenta lo stato fondamentale).

Ma perché dare questa importanza a  $|0\rangle$  e perché ordinare temporalmente ( $T$ -prodotto) gli operatori? Il vuoto è scelto perché è lo stato di partenza dal quale creare qualsiasi altra configurazione con operatori di creazione e distruzione; è l'unico stato di una teoria di campo invariante sotto trasformazioni appartenenti al gruppo di Poincaré. L'ordinamento temporale, invece, serve per facilitare il legame tra la funzione di Green e la matrice S, così come descritto nell'Appendice A, oltre che permettere di sfruttare il Teorema di Wick riportato nell'Appendice B

## 1.2 L'integrale di percorso

L'integrale di percorso nasce dal principio di sovrapposizione in meccanica quantistica: quando un processo può avvenire in più modi, l'ampiezza totale è la somma coerente delle ampiezze di ciascun modo.

Se vogliamo calcolare l'ampiezza di transizione da uno stato  $|x_a\rangle$  ad uno stato  $|x_b\rangle$  troviamo:

$$\begin{aligned} |x_a\rangle &= \text{stato per } t = t_1 \\ e^{-iT_H}|x_a\rangle &= \text{stato per } t = t_1 + T \\ \langle x_b|e^{-iT_H}|x_a\rangle &= \text{ampiezza di transizione a } |x_b\rangle \end{aligned} \quad (1.1)$$

Enunciamo per prima cosa le Regole di Feynman così come scritte da lui stesso [5, 6]:

1. la probabilità di ogni evento è data dal modulo quadro di un'ampiezza di transizione in campo complesso
2. questa ampiezza si valuta sommando tutte le possibili evoluzioni temporali
3. il contributo probabilistico di ogni possibile evoluzione del sistema è proporzionale ad  $e^{iS/\hbar}$ , dove  $S$  è l'azione legata a quella particolare dinamica, cioè l'integrale della Lagrangiana su quel particolare percorso.

Per ottemperare alle richieste del secondo postulato è pertanto necessario integrare il contributo di ciascun percorso del terzo punto sullo spazio di tutti i possibili percorsi (evoluzioni) del sistema tra un dato stato iniziale ed uno finale. L'integrale sui cammini, come si può notare, assegna a ciascun percorso la stessa ampiezza; varia solo la fase. I percorsi "bizzarri" si annullano grazie a interferenze distruttive con altri cammini.

Per un sistema generico, possiamo scrivere l'ampiezza totale di passare dallo stato  $x_a$  ad  $x_b$  come

$$\langle x_b | e^{-iTH} | x_a \rangle = U(x_a, x_b; T) = \sum_{\text{tutti i percorsi}} e^{i \cdot (\text{fase})} = \int \mathcal{D}x(t) e^{i \cdot (\text{fase})} \quad (1.2)$$

Il simbolo  $\int \mathcal{D}x(t)$  è semplicemente una convenzione per indicare la sommatoria su tutti i percorsi. L'integrale di 1.2 è un *funzionale* siccome associa ad una generica funzione  $x(t)$  un numero complesso (un'ampiezza). Così come una funzione ordinaria può essere integrata su un insieme di punti, un funzionale viene integrato su un set di funzioni. Per la misura di questo integrale funzionale si usa convenzionalmente la lettera  $\mathcal{D}$ .

La fase dell'ampiezza di transizione è data dall'azione lungo la traiettoria. Possiamo quindi scrivere, esplicitando  $\hbar$ :

$$U(x_a, x_b; T) = \int \mathcal{D}x(t) e^{iS[x(t)]/\hbar} \quad (1.3)$$

La situazione diviene approssimativamente classica se il valore dell'azione è molto grande rispetto ad  $\hbar$ , quando cioè  $\hbar \rightarrow 0$ . L'azione classica  $S$  è naturalmente definita come  $\int_0^T L dt$  dove 0 e  $T$  sono gli estremi temporali corrispondenti al percorso. In queste condizioni, l'evoluzione di un sistema è governata dal principio di minima azione. La condizione  $\delta S = 0$  implica che traiettorie vicine a quella di minima azione contribuiscano all'integrale 1.2 con fasi molto simili, quindi interferiscono in modo costruttivo. Al contrario, vicino ad ogni traiettoria che non estremizza l'azione, ve ne sono altre con fase differente e che interferiscono distruttivamente. Quindi l'integrale sarà dominato dal contributo di un piccolo insieme di traiettorie vicine alla traiettoria  $x_c(t)$  di minimo.

Ma vediamo meglio come avviene il passaggio alla teoria dei campi.

Passando alle coordinate canoniche  $q_i$  e  $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ , e introducendo la definizione di Hamiltoniana come trasformata di Legendre della Lagrangiana

$$H(p_j, q_j, t) = \sum_i \dot{q}_i p_i - L(q_j, \dot{q}_j, t)$$

la 1.3, trascurando  $\hbar$ , diventa:

$$\prod_i \int \mathcal{D}q(t) \int \mathcal{D}p(t) \exp \left[ i \int_0^T dt \sum_i \dot{q}_i p_i - H(q, p) \right] \quad (1.4)$$

La formula 1.4 è stata ricavata nella massima generalità possibile. Dovrebbe pertanto valere anche se viene applicato a una teoria quantistica dei campi. Se prendiamo un'Hamiltoniana di una teoria scalare interagente senza massa abbiamo infatti:

$$H = \int d^3x \mathcal{H}$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + V(\phi)$$

Inserendo la definizione, similmente alle coordinate canoniche, di  $\pi$ :

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{x}, t)$$

possiamo riscrivere la densità di Hamiltoniana precedente come

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + V(\phi)$$

Inserendo tutto in 1.4 si ottiene

$$\int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\pi \exp \left[ i \int_0^T d^4x \left( \dot{\phi} \pi - \mathcal{H}(\phi, \pi) \right) \right]$$

$$= \int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\pi \exp \left[ i \int_0^T d^4x \left( \dot{\phi} \pi - \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + V(\phi) \right) \right] \quad (1.5)$$

con la limitazione di integrazione per  $\phi(x)$  da  $x_a(\mathbf{x})$  per  $x^0 = 0$  a  $x_b(\mathbf{x})$  per  $x^0 = T$ . Con alcuni calcoli algebrici quali il completamento del quadrato e l'integrazione successiva in  $\mathcal{D}\pi$ , si può giungere alla forma preferita:

$$\langle \phi_b(\mathbf{x}) | e^{-iHT} | \phi_a(\mathbf{x}) \rangle = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[ i \int_0^T d^4x \mathcal{L} \right]$$

Per fare un uso efficace di quanto ottenuto finora, in [1, 3, 4] viene derivato il metodo per calcolarsi la funzione di correlazione a partire dal funzionale generatore. Riportiamo solo il risultato:

$$\langle \Omega | T \phi(x_1) \phi(x_2) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \phi(x_2) \exp \left[ i \int_{-T}^T d^4x \mathcal{L} \right]}{\int \mathcal{D}\phi \exp \left[ i \int_{-T}^T d^4x \mathcal{L} \right]} \quad (1.6)$$

Siamo giunti quindi a legare l'azione alla funzione di correlazione. Finora l'espressione ricavata non ha mai subito approssimazioni. Ma, come preannunciato all'inizio di questo elaborato, l'abbiamo ricavata in modo tale che fosse ideale per un calcolo perturbativo: dobbiamo solo decidere quanti termini tenere dello sviluppo di Taylor dell'esponenziale.

### 1.3 Il funzionale generatore

Introduciamo ora un metodo più raffinato e compatto per calcolare le funzioni di Green a partire dall'integrale di percorso.

Per prima cosa definiamo la derivata funzionale in 4 dimensioni:

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} J(y) = \delta^{(4)}(x-y) \quad \text{or} \quad \frac{\delta}{\delta J(x)} \int d^4y J(y)\phi(y) = \phi(x)$$

si può notare come sia la generalizzazione a funzioni continue della regola per vettori discreti ortonormali

$$\frac{\partial}{\partial x_i} x_j = \delta_{ij}$$

Per fare la derivata funzionale di espressioni complesse si seguono le regole ordinarie di derivazione per funzioni composte:

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} \exp \left[ i \int d^4y J(y)\phi(y) \right] = i\phi(x) \exp \left[ i \int d^4y J(y)\phi(y) \right]$$

L'oggetto fondamentale di questo formalismo è il *funzionale generatore* delle funzioni di correlazione che, per una teoria scalare reale, è definito come

$$Z[J] \equiv \int \mathcal{D}\phi \exp \left[ i \int d^4x [\mathcal{L} + J(x)\phi(x)] \right]$$

Le funzioni di correlazione del campo di Klein-Gordon di questo esempio possono quindi essere semplicemente calcolate prendendo la derivata funzionale del funzionale generatore. Per esempio, la funzione di Green a due punti è

$$\langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle = \frac{1}{Z_0} \left( -i \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \right) \left( -i \frac{\delta}{\delta J(x_2)} \right) Z[J] \Big|_{J=0}$$

dove  $Z_0 = Z[J=0]$ . Ciascuna derivata funzionale mi abbassa un fattore  $\phi$  nel numeratore di  $Z[J]$ ; imponendo  $J=0$  ritorniamo all'espressione 1.6.

## I diagrammi di Feynman

### 2.1 Diagrammi di una teoria scalare

Proviamo a prendere il valore di aspettazione del  $T$ -prodotto di 4 campi scalari sul vuoto. Per il teorema di Wick [7] [Appendice B], gli unici termini che sopravvivono sono quelli totalmente contratti, dato che quelli che contengono operatori non contratti hanno un valore di aspettazione sul vuoto (Vacuum Expectation Value – VEV) nullo.

$$\begin{aligned}
 \langle 0|T\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\phi_I(x_3)\phi_I(x_4)\}|0\rangle &= \overbrace{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\phi_I(x_3)\phi_I(x_4)} \\
 &+ \overbrace{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\phi_I(x_3)\phi_I(x_4)} + \overbrace{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\phi_I(x_3)\phi_I(x_4)} \\
 &= D_F(x_1-x_2)D_F(x_3-x_4) + D_F(x_1-x_3)D_F(x_2-x_4) + D_F(x_1-x_4)D_F(x_2-x_3)
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Considerando la complessità già raggiunta in questi primi passaggi e prevedendo ciò che può succedere con tutti i termini che vengono generati da uno sviluppo perturbativo della 1.6, abbiamo la necessità di trovare un metodo ingegnoso per semplificarci il lavoro. Dev'essere questo ciò che ha pensato Richard P. Feynman quando sviluppò quelli che sono universalmente noti come i “Diagrammi di Feynman” [5, 6].

Consideriamo il caso analizzato nella 2.1. Rappresentiamo  $x_1, x_2, x_3$  e  $x_4$  con dei punti e ciascun propagatore come una linea che li congiunge. Allora, la 2.1 può essere rappresentata come somma di 3 diagrammi:

$$\begin{aligned}
& \langle 0|T \{ \phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\phi_I(x_3)\phi_I(x_4) \} |0\rangle = \\
& \begin{array}{c} x_1 \text{ --- } x_2 \\ \bullet \text{ --- } \bullet \\ x_3 \text{ --- } x_4 \\ \bullet \text{ --- } \bullet \end{array} \\
& + \\
& \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \\ \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ \bullet \quad \bullet \\ x_3 \quad x_4 \end{array} \\
& + \\
& \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \\ x_3 \quad x_4 \end{array}
\end{aligned}$$

I diagrammi di Feynman qui riportati favoriscono l'interpretazione della teoria: due particelle sono create in due punti dello spazio-tempo, si propagano verso altri due punti e qui sono distrutte. La 2.1 descrive il processo come una somma di 3 termini ciascuno contenente due propagatori, che qui sono rappresentati come traiettorie, tutte quelle possibili per collegare i punti a due a due.

### 2.1.1 La rivoluzione grafica

Come si può anche vedere in maniera approfondita nell'Appendice A, la matrice di scattering è strettamente legata alle funzioni di Green. Il risultato a cui si giunge, molto comodo per uno sviluppo perturbativo, è il seguente:

$$\langle \Omega|T\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle 0|T \left\{ \phi_I(x)\phi_I(y) \exp \left[ -i \int_{-t}^t dt_1 H_I(t_1) \right] \right\} |0\rangle}{\langle 0|T \left\{ \exp \left[ -i \int_{-t}^t dt_1 H_I(t_1) \right] \right\} |0\rangle} \quad (2.2)$$

Proviamo, ora che ne abbiamo gli strumenti, ad analizzare il numeratore

della 2.2. Espandiamo per prima cosa l'esponenziale come serie di Taylor:

$$\begin{aligned} & \langle 0 \left| T \left\{ \phi_I(x)\phi_I(y) \exp \left[ -i \int dt H_I(t) \right] \right\} \right| 0 \rangle = \\ & \langle 0 \left| T \left\{ \phi_I(x)\phi_I(y) + \phi_I(x)\phi_I(y) \left[ -i \int dt H_I(t) \right] + \dots \right\} \right| 0 \rangle \end{aligned} \quad (2.3)$$

Il primo termine dello sviluppo, per quanto già visto, risulta essere il propagatore di Feynman per una teoria libera:

$$\langle 0 | T \{ \phi_I(x) \phi_I(y) \} | 0 \rangle = D_F(x - y)$$

Il secondo termine, invece, inserendo la definizione di densità di Hamiltoniana, diventa:

$$\begin{aligned} & \langle 0 \left| T \left\{ \phi_I(x)\phi_I(y) (-i) \int dt H_I(t) \right\} \right| 0 \rangle = \\ & \langle 0 \left| T \left\{ \phi_I(x)\phi_I(y) (-i) \int dt \int d^3z \frac{\lambda}{4!} \phi^4(t, z) \right\} \right| 0 \rangle = \\ & \langle 0 \left| T \left\{ \phi_I(x)\phi_I(y) \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4z \phi(z)\phi(z)\phi(z)\phi(z) \right\} \right| 0 \rangle \end{aligned}$$

Applichiamo Wick 2.1 e vediamo come ottenere i termini totalmente contratti dai 6 campi presenti nel precedente risultato: fortunatamente, saremo facilitati dal fatto che dentro l'integrale abbiamo solo dei  $\phi(z)$  che quindi daranno risultati identici tra loro quando utilizzati.

Se contraiamo  $\phi(x)$  con  $\phi(y)$ , restano tre modi di contrarre i  $\phi(z)$  tra loro:  $\overbrace{\phi(z)\phi(z)\phi(z)\phi(z)}$ ,  $\overbrace{\phi(z)\phi(z)\phi(z)\phi(z)}$  e  $\overbrace{\phi(z)\phi(z)\phi(z)\phi(z)}$ , ciascuno dei quali dà un'espressione identica, per quanto appena detto. L'unica altra possibilità realizzabile è quella di contrarre  $\phi(x)$  con un  $\phi(z)$ ,  $\phi(y)$  con un altro  $\phi(z)$  e i due restanti  $\phi(z)$  tra loro; si può verificare che essa è realizzabile con 12 combinazioni che danno identici risultati.

$$\begin{aligned} & \langle 0 \left| T \left\{ \phi_I(x)\phi_I(y) \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4z \phi(z)\phi(z)\phi(z)\phi(z) \right\} \right| 0 \rangle = \\ & = 3 \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right) D_F(x - y) \int d^4z D_F(z - z) D_F(z - z) + \\ & + 12 \left( \frac{-i\lambda}{4!} \right) \int d^4z D_F(x - z) D_F(y - z) D_F(z - z) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Proviamo ancora a disegnare  $x$ ,  $y$  e  $z$  come dei punti e i propagatori come delle linee di collegamento.



$$(2.5)$$

$D_F(x - y)$  è una linea che collega  $y$  ad  $x$ . I due  $D_F(z - z)$  sono invece due linee che ritornano nel punto di origine.



$$(2.6)$$

Il diagramma 2.6 invece rappresenta le 12 combinazioni possibili del secondo termine di 2.4.

D'ora in poi chiameremo i punti dove più linee si congiungono, come ad esempio in  $z$ , dei "vertici" e le linee dei propagatori.

Gli ordini successivi dell'espansione in serie dell'esponenziale sono sempre più complessi, ma ora, con i diagrammi di Feynman, siamo in grado di visualizzarli. Possiamo quindi dire che il numeratore della 2.2 è la somma di tutti i possibili infiniti diagrammi con due punti esterni,  $x$  ed  $y$ .

Diversamente dall'approccio avuto finora, si preferisce quasi sempre fare i calcoli nello "spazio dei momenti". È necessario introdurre a questo fine la trasformata di Fourier del propagatore di Feynman:

$$D_F(x - y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (2.7)$$

Perciò, quando in un vertice abbiamo quattro linee che si incontrano, facendo di ciascun propagatore la trasformata di Fourier resta l'integrale:

$$\int d^4 z e^{-ip_1 \cdot z} e^{-ip_2 \cdot z} e^{-ip_3 \cdot z} e^{-ip_4 \cdot z} = (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)$$

In altre parole, abbiamo ritrovato un principio che ci aspettavamo di vedere se la teoria ottenuta avesse senso fisico, la *conservazione del momento* in un vertice.

Come si può vedere in 2.5, abbiamo due tipi di diagramma di Feynman: connesso e sconnesso. Sconnessi sono tutti quei diagrammi che non hanno linee che li congiungono ad uno dei vertici esterni (in quel caso  $x$  ed  $y$ ). Con un complesso calcolo sviluppato sui principali testi di teoria dei campi, alcuni dei quali riportati nella bibliografia di questo articolo, si può dimostrare che tutti i diagrammi sconnessi vengono eliminati dal denominatore della 2.2.



Possiamo quindi concludere scrivendo che

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | \Omega \rangle =$$

somma di tutti i diagrammi connessi aventi due punti esterni

$$= x \bullet \text{---} \bullet y + x \bullet \text{---} \overset{\text{loop}}{\bullet} z \text{---} \bullet y + x \bullet \text{---} \overset{\text{loop}}{\bullet} z_1 \text{---} \overset{\text{loop}}{\bullet} z_2 \text{---} \bullet y$$

$$+ x \bullet \text{---} \bigcirc \text{---} \bullet y + \dots$$

## 2.2 Le regole di Feynman

Feynman formulò delle prescrizioni per calcolare l'ampiezza di transizione associata a ciascun diagramma, partendo dalla Lagrangiana che descrive la teoria di campo. In questo modo era possibile partire dal disegno grafico dell'evento all'ordine fondamentale e del suo sviluppo perturbativo e da essi ricavarne i termini algebrici, invece che sfruttare i diagrammi "solo" per una visualizzazione più chiara del termine ricavato dalla 2.2. Queste prescrizioni sono note come *Regole di Feynman*.

Ciascuna linea interna corrisponde ad un fattore legato al propagatore della particella virtuale; ciascun vertice dà un fattore derivato dal termine di interazione; le linee entranti ed uscenti devono essere funzioni che trasportano l'energia, il momento e lo spin delle particelle reali coinvolte nell'interazione studiata.

È forse necessario ripetere che le particelle non "scelgono" un particolare diagramma ogni volta che interagiscono: è la somma di tutti i diagrammi possibili, accessibili secondo le regole fisiche, a rappresentare un qualsiasi evento di scattering o decadimento analizzato. Quando vogliamo calcolare un'ampiezza di transizione dobbiamo perciò rappresentare tutti i diagrammi fino all'ordine (dello sviluppo di Taylor) desiderato e quindi costruire le equazioni tipo 2.3 assemblandole con i principi fondamentali forniti dalle Regole di Feynman.

Si può facilitare ancora di più il lavoro con un po' di esperienza sulle Lagrangiane: dopo poco basta l'abitudine per riuscire a leggere direttamente da  $\mathcal{L}$  la struttura dei propagatori e dei vertici, i pezzi fondamentali di questo Lego da costruire [8].

Interpretando l'equazione di Schrödinger come un'equazione di diffusione, si riesce a spiegare il successo di questo nuovo metodo anche in meccanica sta-

tistica, a sua volta rientrata prepotentemente negli studi di fisica particellare [9].

## 2.2.1 Le regole di Feynman per una teoria scalare reale autointeragente

Proviamo a ricavare le regole di Feynman analizzando una teoria scalare reale autointeragente di tipo  $\phi^4$ , la più semplice possibile.

Dalla parte libera dell'azione si può ottenere il termine per il propagatore della particella:

$$iS_0[\phi] = i \int dx \frac{1}{2} \{ g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi(x) \partial_\nu \phi(x) - m^2 \phi^2(x) \}$$

facciamo la trasformata di Fourier dei campi

$$\begin{aligned} &= \frac{i}{2} \int d^4x \left[ g^{\mu\nu} \int dk \partial_\mu e^{-ik \cdot x} \tilde{\phi}(k) \int dq \partial_\nu e^{-iq \cdot x} \tilde{\phi}(q) \right. \\ &\quad \left. - m^2 \int dk e^{-ik \cdot x} \tilde{\phi}(k) \int dq e^{-iq \cdot x} \tilde{\phi}(q) \right] = \\ &= \frac{i}{2} \int d^4x \left[ g^{\mu\nu} \int dk (-ik_\mu) e^{-ik \cdot x} \tilde{\phi}(k) \int dq (-iq_\nu) e^{-iq \cdot x} \tilde{\phi}(q) \right. \\ &\quad \left. - m^2 \int dk dq e^{-ik \cdot x} \tilde{\phi}(k) e^{-iq \cdot x} \tilde{\phi}(q) \right] = \\ &= \frac{i}{2} \int dk dq \left[ (-g^{\mu\nu} k_\mu q_\nu) \tilde{\phi}(k) \tilde{\phi}(q) (2\pi)^4 \delta(k+q) - \right. \\ &\quad \left. - m^2 \tilde{\phi}(k) \tilde{\phi}(q) (2\pi)^4 \delta(k+q) \right] = \\ &= \frac{i}{2} \int dk (2\pi)^4 \left[ g^{\mu\nu} k_\mu k_\nu \tilde{\phi}(k) \tilde{\phi}(-k) - m^2 \tilde{\phi}(k) \tilde{\phi}(-k) \right] = \\ &= \frac{i}{2} \int dk (2\pi)^4 \tilde{\phi}(k) (k^2 - m^2) \tilde{\phi}(-k) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Invece per la parte che descrive l'interazione abbiamo i termini da asso-

ciare ai vertici:

$$\begin{aligned}
 -iV[\phi] &= \frac{-i\lambda}{4!} \int dx \phi^4(x) = \\
 &= \frac{-i\lambda}{4!} \int d^4x \int dk_1 e^{-ik_1 \cdot x} \tilde{\phi}(k_1) \int dk_2 e^{-ik_2 \cdot x} \tilde{\phi}(k_2) \\
 &\quad \int dk_3 e^{-ik_3 \cdot x} \tilde{\phi}(k_3) \int dk_4 e^{-ik_4 \cdot x} \tilde{\phi}(k_4) = \\
 &= \frac{-i\lambda}{4!} \int dk_1 dk_2 dk_3 dk_4 \tilde{\phi}(k_1) \tilde{\phi}(k_2) \tilde{\phi}(k_3) \tilde{\phi}(k_4) \\
 &\quad (2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) = \\
 &= \frac{-i\lambda}{4!} \prod_{j=1}^4 \int dk_j \tilde{\phi}(k_j) (2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

Riassumendo, per una teoria scalare reale autointeragente abbiamo ricavato le seguenti regole di Feynman:

- il propagatore è uguale all'opposto dell'inverso dell'operatore cinetico, che per questo caso di campo scalare è l'operatore  $(k^2 - m^2)$  di Klein-Gordon

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \longrightarrow \\ k \end{array} & & \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}
 \end{array}$$

- il vertice in cui si congiungono quattro propagatori è codificato nel termine del potenziale di interazione nello spazio dei momenti

$$\begin{array}{ccc}
 x \bullet & & \frac{-i\lambda}{4!}
 \end{array}$$

- la conservazione del momento in un vertice è anch'essa codificata nel termine del potenziale e si esprime con il  $\delta$  dei momenti, presi convenzionalmente col segno positivo se entranti

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \swarrow \quad \searrow \\ \bullet \\ \nwarrow \quad \nearrow \end{array} & & (2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)
 \end{array}$$



## L'elettrodinamica quantistica

### 3.1 Le regole di Feynman della QED

In modo completamente analogo a quanto fatto nel paragrafo 2.2, possiamo riformulare tutto il discorso partendo da Lagrangiane diverse. Se infatti sfruttiamo una Lagrangiana di Yukawa riusciamo a descrivere l'interazione di un campo spinoriale complesso di Dirac con un campo scalare reale di Klein-Gordon.

Possiamo anche provare con un modello teorico di campo completamente realistico: l'elettrodinamica quantistica (QED) spinoriale, ovvero la teoria Lorentz-covariante la cui densità di Lagrangiana è data da:

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi} \left( \frac{1}{2}i \overleftrightarrow{\not{D}} - M + e\mathcal{A} \right) \psi \quad (3.1)$$

Essa descrive le interazioni tra un campo spinoriale materiale quantizzato e un campo vettoriale non massivo che descrive la radiazione elettromagnetica.

Si può notare subito che, oltre ad essere covariante per trasformazioni di Lorentz,  $\mathcal{L}_{QED}$  è anche invariante per simmetrie di gauge locali del tipo

$$\begin{cases} A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu f(x) \\ \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \exp\{ie f(x)\} \psi(x) \\ \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) \exp\{-ie f(x)\} \end{cases}$$

dove  $f$  è una funzione reale arbitraria.

A causa di questa libertà di gauge, il propagatore per il potenziale vettore non è di facile derivazione; se infatti procediamo con il solito metodo, giungiamo al risultato mostrato in Appendice C: il termine cinetico non è invertibile. Per risolvere il problema si introduce un termine di *gauge fixing*:

$$\mathcal{L}_{gf} = A^\mu(x) \partial_\mu B(x) + \frac{1}{2}\zeta B^2(x) \quad (3.2)$$

Questo termine permette di invertire l'azione e di scrivere pertanto il termine per il propagatore di Feynman di una teoria vettoriale (massiva ponendo  $m \neq 0$ ) interagente, noto come propagatore di Stuckelberg:

$$D_{\mu\nu}^F = \frac{i}{(2\pi)^4} \int dk \frac{\exp\{-i k \cdot x\}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \left\{ -g_{\mu\nu} + \frac{(1 - \zeta)k_\mu k_\nu}{k^2 - \zeta m^2 + i\epsilon'} \right\} \quad (3.3)$$

Il prezzo da pagare è stato l'introduzione di un campo B ausiliario non fisico. Questo andrà eventualmente escluso dal settore fisico della teoria, in modo da garantire la possibilità di fare previsioni con i diagrammi di Feynman. La condizione per poterlo escludere dalla teoria è imporre la non esistenza dei quanti di B. Purtroppo, in una teoria interagente questo requisito non è banale da esaudire.

Lavorando con lo stesso procedimento sulla Lagrangiana definitiva della QED, possiamo scrivere finalmente le regole di Feynman:

- vertice:

$$x \bullet \quad ie\gamma^\mu$$

- propagatore del fotone:

$$\text{~~~~~} \quad -g^{\mu\nu} \frac{i}{k^2 + i\epsilon}$$

$k$

- propagatore dello spinore:

$$\text{—————} \quad \frac{i(\not{p} + M)}{p^2 - M^2 + i\epsilon}$$

$p$

- conservazione del momento ad ogni vertice

$$\begin{array}{c} p \\ \swarrow \\ \text{---} \text{---} k \\ \nwarrow \\ q \end{array} \quad (2\pi)^4 \delta(p + q + k)$$

- integrazione su ciascun momento interno:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$$

- un fattore  $(-1)^n$  deve essere incluso nel calcolo dell'ampiezza di un diagramma contenente  $n$  loop fermionici

## 3.2 Alcune conseguenze dello sviluppo perturbativo della QED

### 3.2.1 La regolarizzazione

Le regole di Feynman, come visto nel paragrafo precedente, portano ad integrali sui momenti interni. Questo sempre per il principio del path integral: tutti i modi possibili vanno sommati e un momento interno non ha alcun vincolo derivante dalle condizioni esterne.

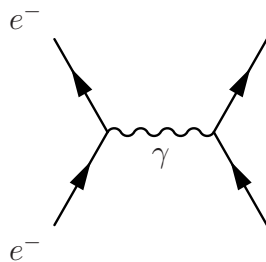
Ma un integrale su un loop, così come viene chiamato un percorso chiuso in un diagramma di Feynman, porta ad espressioni palesemente divergenti. Queste divergenze che dobbiamo affrontare sono dovute al comportamento “non integrabile” della funzione integranda per momenti elevati: sono le *divergenze ultraviolette* delle teorie di campo quantistiche. Un altro tipo di divergenze, dovute a delle singolarità nell’espressione, compaiono nelle teorie come la QED che prevedono particelle non massive: i fotoni, infatti soffrono anche di *divergenze infrarosse*, per momenti tendenti a zero.

Per dare significato matematico e predittivo alle teorie, è necessario rimuovere questi termini problematici. Per questo scopo sono stati studiati metodi di regolarizzazione al fine di riottenere integrali convergenti.

Non sarà nostro scopo in questa relazione trattare approfonditamente questi temi, ma una veloce descrizione dei metodi di regolarizzazione più diffusi per le divergenze ultraviolette si può trovare nell’Appendice D.

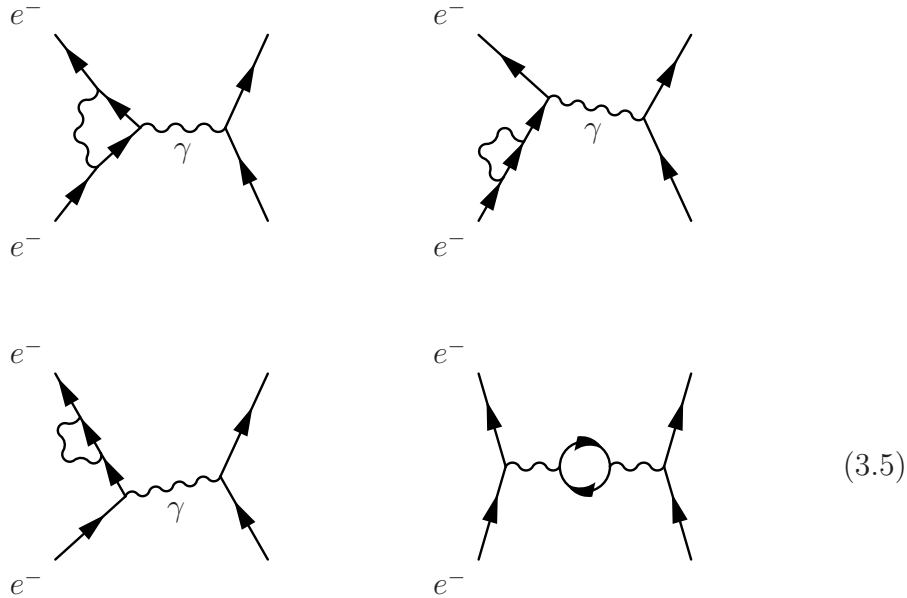
### 3.2.2 Scattering elettromagnetico troncato al prim’ordine

Ora che abbiamo familiarità con i diagrammi fondamentali, possiamo mostrare qualche utile applicazione dello sviluppo perturbativo. Se la teoria è corretta, infatti, tutti i processi fondamentali, quale ad esempio quello dello scattering di un elettrone su di una particella pesante rappresentato in figura 3.4, hanno delle correzioni di ordine superiore.



(3.4)

Quanti più ordini di sviluppo consideriamo, tanto più ci avviciniamo alla descrizione del processo reale. In figura 3.5 abbiamo riportato, a titolo d'esempio, i diagrammi al secondo ordine perturbativo descritti dall'equazione 2.2, relativi al processo fondamentale 3.4.



La correzione all'ordine  $\alpha$  della sezione d'urto viene quindi dall'interferenza tra i diagrammi del secondo ordine 3.5 e quello del livello fondamentale 3.4. Ci sarebbero da considerare altri diagrammi, originati dai loop sui propagatori del campo esterno, ma possono essere trascurati nel limite che la particella sia molto più pesante dell'elettrone (abbiamo visto che la massa appare al denominatore del propagatore<sup>1</sup>).

Dei quattro diagrammi in 3.5, il primo, noto come correzione di vertice, è il più intricato e causa “effetti collaterali”, come il momento magnetico anomalo dell'elettrone ottenuto in via teorica da Julian Schwinger nel 1947 [10]. Basandosi sui successi di questi primi risultati, le generazioni successive di fisici migliorarono l'accuratezza sia teorica che sperimentale delle misure di questo parametro. I calcoli all'ordine  $\alpha^2$  e successivi, naturalmente, sono molto complessi dal punto di vista teorico dovendo trattare sistematicamente con divergenze ultraviolette. Questi calcoli teorici sono stati confermati da esperimenti sempre più raffinati. Si ricordano, ad esempio, in letteratura la tecnica ideata da Dehmelt e i suoi collaboratori, che consisteva nello studio di

---

<sup>1</sup>Fisicamente, la particella pesante accelera di meno e quindi irraggia meno durante la collisione

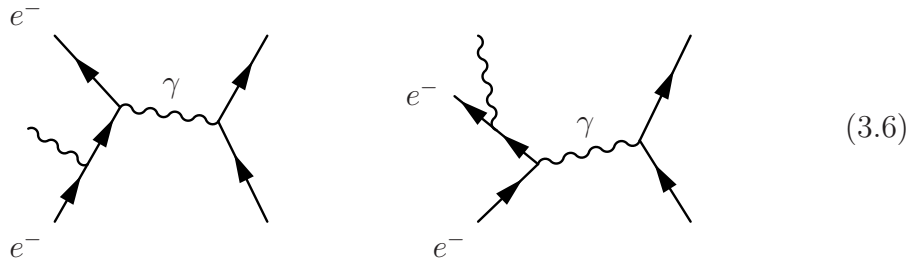


stati eccitati risonanti di spin per elettroni intrappolati da campi elettrostatici e magnetostatici [11].

Il secondo e il terzo diagramma sono delle “correzioni sui rami esterni”: così come i diagrammi sconnessi rappresentano l’autointerazione del vuoto della teoria, questi termini vengono recuperati nella ridefinizione di stato di particella singola nella rappresentazione di interazione (Appendice A). Siccome questi diagrammi sono slegati dal processo di scattering vero e proprio, li possiamo escludere dal calcolo degli elementi della matrice  $S$ . Questo procedimento è chiamato *amputazione*.

L’ultimo diagramma è chiamato “polarizzazione del vuoto”. È sicuramente il più complesso da trattare e ne accenneremo brevemente nel prossimo capitolo.

Lo studio di queste correzioni, come abbiamo visto, è complicato dalla loro mal definizione, a causa delle divergenze ultraviolette nell’integrazione del momento dei loop. I primi tre diagrammi includono anche divergenze infrarosse ( $k \rightarrow 0$ ) che si possono cancellare includendo nei conti i diagrammi 3.6 di bremsstrahlung di fotoni di basso momento. Non andremo ad analizzare le ragioni teoriche, limitandoci a dire che sono riportate nei testi di teoria di campi citati in bibliografia oppure in qualsiasi altro manuale equivalente. Possiamo comunque specificare che sperimentalmente sono ben accettati, dato che risulta impossibile distinguere questi fotoni aggiuntivi dalle particelle nello stato finale, date le loro condizioni di collimazione e basso momento.



Calcoli di ordine elevato in QED sono stati portati avanti per molte altre quantità: energie di transizione nell’atomo di idrogeno e negli atomi idrogenoidi, il momento magnetico anomalo del muone, i tassi di decadimento del positronio negli stati di singoletto e di tripletto. Molte di queste quantità sono state anche misurate sperimentalmente con ottima precisione.

I risultati sono sorprendenti: i valori calcolati sperimentalmente e quelli ottenuti dal calcolo teorico combaciano oltre ogni ragionevole aspettativa. In base ai risultati presentati in letteratura (citiamo solo come esempio l’articolo riassuntivo su questi risultati di T. Kinoshita contenuto in [12]) è possibile dire che la QED è la teoria fisica confermata sperimentalmente in modo più stringente, nonché quella che ha avuto il maggior successo.

### 3.2.3 La polarizzazione del vuoto

Gli effetti dell'ultimo diagramma di 3.5 sono quelli di ridefinire il potenziale coulombiano. Queste correzioni radiative sono chiamate *potenziale di Serber-Uehling* [13, 14].

Possiamo interpretare i risultati come dovuti allo screening: quando due particelle cariche, ad esempio due elettroni, sono ad una distanza della lunghezza d'onda Compton  $\lambda_e = \hbar/m_e c$ , l'emissione e il riassorbimento di coppie  $e^+e^-$  trasforma il vuoto in un mezzo dielettrico con la conseguenza che la carica apparente è inferiore alla *carica nuda*  $e_0$ . A distanze inferiori incominciamo a penetrare la nube di polarizzazione del vuoto e rileviamo una carica sempre maggiore.

Questo fenomeno è noto come effetto di polarizzazione del vuoto ed è stato verificato anche in esperimenti recenti come LEP.

### 3.2.4 La costante di accoppiamento

Come abbiamo visto nel paragrafo 3.1, la carica elettrica rientra nella definizione di vertice attraverso la costante di accoppiamento  $\alpha$  tra campi. La variazione della carica elettrica misurata in funzione della scala di energia dell'evento fa sì che  $\alpha$  non sia una costante. Si parla in questo caso di *running coupling constant*, definizione alla base dell'apparato matematico noto come gruppo di rinormalizzazione.

Se la costante di accoppiamento è  $\ll 1$  la teoria è detta debolmente accoppiata. La QED è una di esse e quindi è ben descritta da un'espansione in serie di potenze della costante d'accoppiamento. Ma se  $\alpha$  fosse dell'ordine dell'unità o più, la teoria sarebbe detta fortemente accoppiata, rendendo vano qualsiasi sforzo di descriverla tramite teorie perturbative (è un problema che incontreremo parlando della QCD).

Introduciamo il parametro  $\beta$  come rapporto tra la variazione della costante d'accoppiamento e la variazione dell'energia nel centro di massa dell'evento. Se  $\beta = 0$  allora la teoria è indipendente dalla scala di energia in esame.

Vediamo che la QED ha una funzione  $\beta$  positiva: l'accoppiamento cresce al crescere dell'energia; in particolare a basse energie  $\alpha \approx 1/137$  mentre alla scala di energia del bosone Z ( $\sim 90$  GeV), misurate a LEP, si trova  $\alpha \approx 1/127$ . Inoltre si trova come la costante d'accoppiamento continui a crescere, secondo la teoria perturbativa, con la relazione

$$\alpha(Q^2) = \frac{\alpha(\mu^2)}{1 - \frac{\alpha(\mu^2)}{3\pi} \log\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right)} \quad (3.7)$$

fino a diventare una teoria fortemente accoppiata (Polo di Landau) ( $\alpha(\mu^2)$  è un valore di riferimento ad un energia  $\mu$  arbitraria,  $Q$  è l'energia dell'evento in esame).

In realtà, non si può pretendere che uno sviluppo perturbativo sia valido anche con una costante d'accoppiamento troppo elevata e quindi è possibile che il polo di Landau sia semplicemente un artefatto dell'applicazione della teoria perturbativa in una situazione nella quale non è più valida [15].



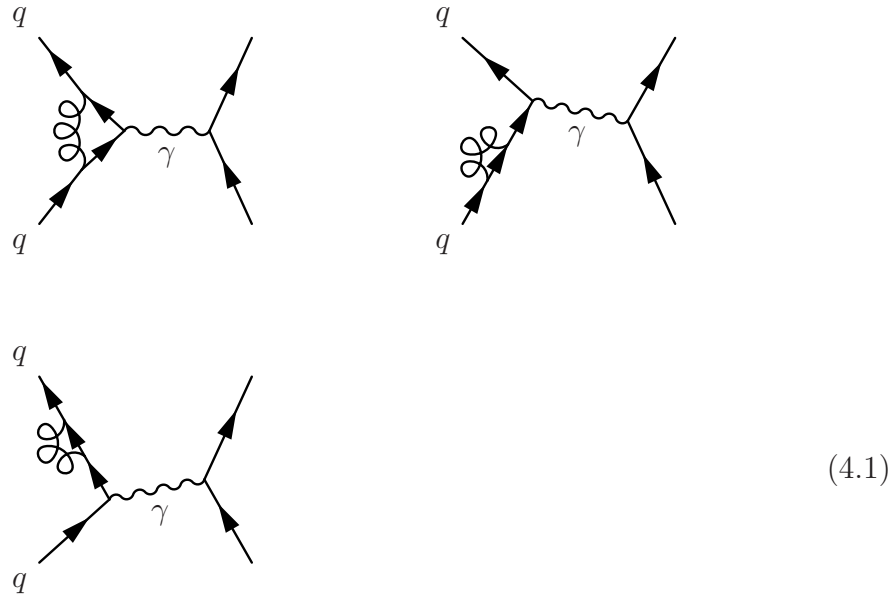
## La cromodinamica quantistica

### 4.1 La QCD e lo sviluppo perturbativo

Nel capitolo precedente ci siamo dedicati allo studio della Lagrangiana dell'elettrodinamica quantistica, ovvero le interazioni tra cariche elettriche mediate da fotoni.

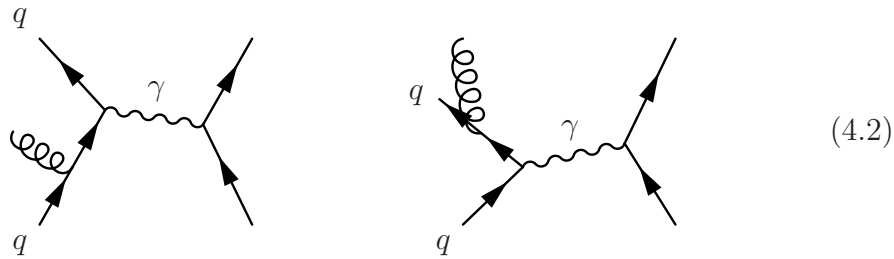
In natura esistono altri tipi di forze fondamentali descritti da altrettante Lagrangiane, che poi possono essere combinate per costituire quello che è noto come Modello Standard [16, 17, 18, 19].

Se nei diagrammi 3.5 sostituiamo gli elettroni con dei quarks, non sorge alcun problema: anche i quark possiedono carica elettrica e quindi un eventuale loro processo di scattering deve includere questi fattori. Ma, a complicare la situazione, intervengono anche i gluoni, mediatori della forza forte:



In 4.1 abbiamo riportato i tre nuovi diagrammi del livello fondamentale che si vanno ad aggiungere ai precedenti 3.5. Da notare che non abbiamo ancora modificato l'interazione con il campo esterno, mediato da un fotone.

Come prima, dobbiamo anche sommare i diagrammi che includono la radiazione di gluoni collimati di basso momento, che sarebbero difficilmente distinguibili dal segnale delle particelle e che si rivelano essere indispensabili per la rinormalizzazione della teoria:



A livello computazionale, verrebbe da pensare che si tratti di sostituire solo qualche parametro, come la costante di accoppiamento  $\alpha_{QED}$  con  $\alpha_S$  e la carica elettrica con quella di colore. Purtroppo non è così semplice: il gluone stesso è un portatore di carica, diversamente dal fotone, e svolge perciò il doppio ruolo di radiazione e radiatore, modificando continuamente la sua carica e quella delle particelle colorate coinvolte.

Si può già intravedere la complicazione che può nascere da queste premesse: esistono infatti nuovi diagrammi tipo 4.3, non presenti in QED.

(4.3)

Soprattutto, in QCD c'è il grave problema della grandezza della costante d'accoppiamento.

In una teoria non abeliana come la QCD, la funzione  $\beta$  può anche essere negativa, così come dimostrato da Wilczek, Politzer e Gross [20, 21, 22, 23] che con questi articoli presero il Nobel nel 2004; il risultato è che l'accoppiamento decresce ad alte energie. Ed è proprio questo il comportamento rivelato dagli esperimenti di QCD. L'analisi degli ordini superiori dei diagrammi di Feynman per il propagatore del gluone porta a questa formula per la running coupling constant  $\alpha_S$  della forza forte:

$$\alpha_S(Q^2) = \frac{\alpha_S(\mu^2)}{1 + \frac{\alpha_S(\mu^2)}{12\pi} (33 - 2n_f) \log(Q^2/\mu^2)} \quad (4.4)$$

Il coefficiente al denominatore ha segno opposto a quello della QED 3.7 a meno che non si sia in un mondo con più di 16 sapori per i quark (e gli esperimenti non sembrano concordare con questa ipotesi).

Questo significa che a distanze molto ravvicinate, come ad esempio i quark all'interno del nucleo oppure in uno scattering ad energie molto elevate, la forza forte praticamente scompare e permette ai quark di muoversi come particelle quasi non interagenti. Questo fenomeno è chiamato *libertà asintotica*. Possiamo pertanto sfruttare le teorie perturbative solo in alcuni range di energia.

La libertà asintotica è dunque un concetto perturbativo. Ma la ricerca di quark e gluoni *liberi* continua a dare risultati insoddisfacenti. Si può pertanto capire come la teoria perturbativa della cromodinamica quantistica debba procedere diversamente da quella della QED. La matrice  $S$  di scattering e la sezione d'urto per particelle isolate in QCD svaniscono, sostituite da dinamiche di stati legati. Questa è l'ipotesi del *confinamento*, che esula completamente dalle possibilità delle teorie perturbative. Per questo motivo la pQCD (perturbative QCD) si è sviluppata molto lentamente, spesso vista con molto scetticismo.

Quando infatti studiamo un'interazione tra particelle che subiscono la forza forte, non possiamo descrivere solo il processo a corte distanze (alte energie): dobbiamo considerare anche quando la distanza non è più sufficiente a garantire una costante d'accoppiamento  $\ll 1$ . Una trattazione solo

perturbativa di un fenomeno QCD ad alte energie, pertanto, trascura questo problema.

Le regole della pQCD sono costruite in modo analogo alle regole di Feynman per la QED presentate nei capitoli precedenti, pur tenendo conto di tutte le novità descritte finora. L'accoppiamento molto forte della QCD, anche ad alte energie, in confronto a quello debole della QED fa sì che sia necessaria l'inclusione di più ordini di diagrammi di Feynman per raggiungere un pari grado di precisione.

Siccome la QCD rimane una teoria insoluta, priva di un unico metodo di approssimazione valido a qualsiasi scala di energia, la giustificazione per l'uso della QCD perturbativa è in mano ai ricercatori di ciascun esperimento. L'alternativa, molto utilizzata al giorno d'oggi grazie alla notevole evoluzione dei computer che l'ha resa possibile, è data dai calcoli su reticolo (lattice QCD), l'unico metodo per fare calcoli quando la costante d'accoppiamento non permette uno sviluppo perturbativo [24, 25, 26]. Nel tempo, è diventato chiaro che la pQCD descrive in modo accurato un ampio spettro di esperimenti ad alta energia e di grande momento trasferito; in questo ristretto ambito si è sviluppata e ha dimostrato d'essere uno strumento indispensabile per gli studi delle interazioni forti. Rimane molto complessa da trattare la zona di energie nella quale gli aspetti perturbativi e non-perturbativi della teoria si sovrappongono.

## 4.2 La lagrangiana QCD

La Lagrangiana completa gauge-invariante della QCD deve descrivere la cinematica dei quanti del campo forte (gluoni), delle particelle elementari materiali (quark) e le interazioni quark-gluoni. La formulazione completa è la seguente:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_f \bar{\Psi}_f \gamma^\mu (i\partial_\mu - gA_\mu) \Psi_f - m_f \bar{\Psi}_f \Psi_f - \frac{1}{2} \text{tr} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \quad (4.5)$$

dove  $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + ig [A_\mu, A_\nu]$ .

La differenza sostanziale nel termine di propagazione del campo forte (gluone) rispetto alla QED sta nella presenza di termini non lineari nella definizione di  $F_{\mu\nu}^a$ . Sostanzialmente essi rendono conto del fatto che il campo di colore agisce anche come sua stessa sorgente, cioè, come visto, che i gluoni trasportano essi stessi carica di colore.

Una difficoltà aggiunta nella Lagrangiana QCD è data dal gauge fixing. Anche in questo caso, per poter ricavare le regole di Feynman, dobbiamo introdurre campi fittizi, detti *ghost di Faddeev-Popov* [27], che però non



appaiano mai negli stati fisici — a conferma della loro non fisicità, risultano essere fermioni di spin 0.

La Lagrangiana completa nel gauge Lorentz-covariante è pertanto la seguente [28]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD} = & -\frac{1}{4}(F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a)^2 + \zeta(\partial_\mu A_\mu^a)^2 + \bar{\phi}(\partial^\mu \delta_{ab} + g f^{asb} A_\mu^s) \partial^\mu \phi^b + \\ & + \sum_f \bar{\Psi}_f [\gamma^\mu (\partial_\mu + g A_\mu^s) - m_f] \Psi_f \end{aligned} \quad (4.6)$$

dove la sommatoria sugli indici di colore è implicita, il secondo termine è il gauge-fixing e il terzo introduce i ghost di Faddeev-Popov.

### 4.3 Le regole di Feynman per la QCD

Saltiamo i dettagli riguardo lo sviluppo della QCD perturbativa e riportiamo solo i “mattoncini” fondamentali per il calcolo dei diagrammi di Feynman, cioè i termini relativi ai propagatori e ai vertici della QCD.

Per qualsiasi processo per il quale il diagramma di Feynman viene disegnato usando linee e vertici seguenti, la lista permette di costruire l’espressione matematica per l’ampiezza del processo.

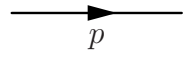
Gli indici latini si riferiscono ai gradi di libertà di colore, quelli greci a quelli spaziali, q ai quark, g ai gluoni e FP al campo ghost di Faddeev-Popov. Per i coefficienti, sono stati usati gli stessi adottati nella Lagrangiana 4.6

- propagatore del gluone:



$$i(D_{\mu\nu}(k))^{ab} = \frac{\delta_{ab} g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$$

- propagatore del quark:



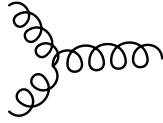
$$(S_{\alpha\beta}(p))^{ab} = \left( \frac{\delta_{ab}}{\not{p} - m + i\epsilon} \right)_{\alpha\beta}$$

- vertice quark-antiquark-gluone



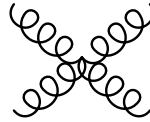
$$(\Gamma_{qqg}^{\mu,c})_{\alpha\beta}^{ab} = g(t^c)^{ab} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta}$$

- vertice tre gluoni



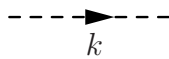
$$(\Gamma_{ggg}^{\mu\nu\sigma})_{abc} = gf_{abc} [g^{\mu\nu}(k-p)^\sigma + \text{perm.}]$$

- vertice quattro gluoni



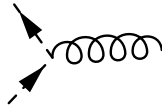
$$\left(\Gamma_{g^4}^{\mu\sigma\nu\tau}\right)_{abcd} = g^2 f_{iab} f_{icd} [(g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} - g^{\mu\tau} g^{\nu\sigma}) + \text{permutazioni cicliche}]$$

- propagatore del campo ghost



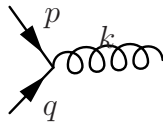
$$(G_{FP}(k))^{ab} = \frac{\delta_{ab}}{k^2 + i\epsilon}$$

- vertice ghost-ghost-gluone



$$(\Gamma_{gFP}^\mu)_{abc} = -gf_{abc} p^\mu$$

- conservazione del momento ad ogni vertice



$$(2\pi)^4 \delta(p + q + k)$$

- integrazione su ciascun momento interno:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}$$

- un fattore  $(-1)^n$  deve essere incluso nel calcolo dell'ampiezza di un diagramma contenente  $n$  loop fermionici o del ghost
- assenza di propagatori ghost esterni (non devono comparire negli stati fisici)

## 4.4 QCD perturbativa e QGP

La QCD perturbativa è stata uno strumento utilissimo nello studio dei fenomeni descrivibili col modello a partoni [29]. Purtroppo le divergenze infrarosse date dalla massa nulla del gluone causano divergenze molto difficili da trattare. Nonostante questo, esistono un buon numero di grandezze definite *infrared safe* che non soffrono di questi problemi e che non dipendono dal comportamento a lunga distanza della teoria. L'obiettivo della QCD perturbativa è stato pertanto quello di identificare ed analizzare esperimenti nei quali la libertà asintotica potesse essere applicata in modo consistente: il più importante è stato sicuramente lo scattering anelastico ad alte energie (Deep Inelastic Scattering – DIS), per il quale i risultati sono stati soddisfacenti [30]

Al giorno d'oggi, invece, uno dei rami di maggior interesse nello studio della forza forte è rappresentato dal plasma quark-gluoni (Quark-Gluon Plasma – QGP). Questo stato della materia nucleare è caratterizzato da altissime densità (o temperature), così che i quark possano essere considerati come liberi all'interno. Esperimenti al Super-Proton-Synchrotron (SPS) del CERN provarono a ricreare questo stato già negli anni Ottanta e Novanta. Solo nel 2000 però si poté annunciare la scoperta di un nuovo stato della materia<sup>1</sup>. Gli sforzi sono continuati oggi dal Relativistic-Heavy-Ion-Collider (RHIC) del laboratorio di Brookhaven. In futuro lo studio sarà approfondito ad LHC, in particolare con ALICE nei periodi in cui nel tunnel saranno fatti collidere ioni pesanti di piombo.

Siccome il QGP sembrerebbe essere un sistema debolmente interagente, dovrebbe essere descrivibile con metodi perturbativi. I dati ottenuti dai primi cinque anni di collisioni a RHIC dimostrano chiaramente che l'obiettivo di avere temperature in eccesso di  $\sim 170$  MeV è stato raggiunto. Era questa la soglia prevista per ottenere la transizione di fase verso il QGP. Mentre ci sono chiari segnali del ruolo come particelle libere dei quark nel determinare gli stati finali prodotti, d'altra parte ci sono anche notevoli evidenze che la materia non si comporti come uno stato “quasi ideale” di quark e gluoni liberi. Piuttosto, il comportamento riscontrato è quello di un fluido denso con bassissima viscosità [31]. L'applicabilità della pQCD alle temperature e alle densità accessibili agli esperimenti attuali è molto limitata: dai calcoli che sono stati fatti risulta che a 600 MeV di temperatura la costante di accoppiamento  $g$  è ancora  $\sim 1$ , invalidando l'ipotesi di validità delle teorie perturbative [32].

Perciò, a causa di questi effetti riscontrati e riconducibili soprattutto al comportamento dei gluoni, non è possibile applicare la pQCD allo studio

---

<sup>1</sup><http://newstate-matter.web.cern.ch/newstate-matter/Experiments.html>

dei fenomeni di QGP alle energie attualmente accessibili. Le simulazioni basate su calcolo su reticolo (lattice QCD) sono predominanti. Si attendono sviluppi sperimentali futuri per verificare se ci sia ancora spazio per teorie perturbative nell'ambito della QCD.

## La rappresentazione d'interazione

In quest'appendice tratteremo un esempio di rappresentazione d'interazione per una teoria scalare reale auto-interagente di tipo  $\phi^3$ .

L'Hamiltoniana per questo tipo di teoria è

$$H = H_{libera} + V_{interazione} = H_0 + H' = H_{Klein-Gordon} + \lambda \int d^3x \hat{\phi}^3 \quad (\text{A.1})$$

In quest'equazione abbiamo il primo termine libero trattabile esattamente; il secondo no. Il nostro intento sarà quello ora di riscrivere la funzione di Green

$$\langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle \quad (\text{A.2})$$

come sviluppo in serie di potenze di  $\lambda$ .

$H_{int}$  contribuisce alla funzione di Green in modo duplice: sia nella definizione dei campi che in quella di  $|\Omega\rangle$ . Mentre nelle teorie di campo libero le rappresentazioni di Schrödinger (SP – Schrödinger picture) e di Heisenberg (HP) sono sufficienti per trattare i campi, gli operatori e le relative evoluzioni temporali, l'inclusione di un termine di interazione complica il formalismo.

È pertanto necessario passare ad una nuova rappresentazione, detta *di interazione* (IP). Diversamente dalle precedenti, nella IP sia gli stati che gli operatori dipendono dal tempo, ma saranno costruiti per agevolare uno sviluppo perturbativo della teoria: gli operatori dipenderanno dalla parte libera dell'Hamiltoniana, gli stati avranno invece una dipendenza dal tempo generata dal potenziale di interazione.

Nell'equazione di Schrödinger le variabili dinamiche sono indipendenti dal tempo, mentre invece le funzioni d'onda delle particelle si evolvono secondo la relazione

$$\hat{H}\psi(\mathbf{x}, t) = i \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (\text{A.3})$$

Questa equazione ha soluzioni del tipo

$$\psi(\mathbf{x}, t) = e^{-i\hat{H}t}\psi(\mathbf{x}, 0)$$

dove possiamo riscrivere l'esponenziale con la corrispondente serie di potenze

$$e^{-i\hat{H}t} = 1 - i\hat{H}t + \frac{1}{2!}(-i\hat{H}t)^2 + \dots$$

Sfruttando il fatto che un'Hamiltoniana è hermitiana per definizione ( $\hat{H} = \hat{H}^\dagger$ ), possiamo verificare l'unitarietà del termine esponenziale:

$$U^\dagger = [\exp(-i\hat{H}t)]^\dagger = \exp(i\hat{H}^\dagger t) = \exp(i\hat{H}t) = U^{-1}$$

Siccome gli elementi della matrice di un operatore vengono genericamente scritti nella forma

$$\langle \phi | \hat{A} | \psi \rangle = \int \phi^*(\mathbf{x}, t) \hat{A} \psi(\mathbf{x}, t) d^3\mathbf{x}$$

sfruttando i precedenti risultati possiamo scrivere

$$\langle \phi | \hat{A} | \psi \rangle = \int \phi^*(\mathbf{x}, 0) e^{i\hat{H}t} \hat{A} e^{-i\hat{H}t} \psi(\mathbf{x}, 0) d^3\mathbf{x}$$

Nell'equazione sopra riportata risiede la differenza tra la rappresentazione di Schrödinger (funzioni d'onda dipendenti dal tempo ed operatori tempo-indipendenti) e quella di Heisenberg (opposta alla SP).

Scrivendo quindi  $\hat{A}(t)$  possiamo anche ricavarne la sua equazione del moto

$$\begin{aligned} \hat{A}(t) &= e^{i\hat{H}t} \hat{A} e^{-i\hat{H}t} \\ \frac{d\hat{A}(t)}{dt} &= -i[\hat{A}(t), \hat{H}] \end{aligned}$$

In termini di rappresentazione di interazione, invece, definiamo il corrispondente operatore  $\hat{A}_I(t)$  come

$$\begin{aligned} \hat{A}_I(t) &= e^{i\hat{H}_0 t} \hat{A} e^{-i\hat{H}_0 t} \\ &= e^{i\hat{H}_0 t} e^{-i\hat{H}t} \hat{A} e^{i\hat{H}t} e^{-i\hat{H}_0 t} \\ &= \hat{U} \hat{A}(t) \hat{U}^{-1} \end{aligned} \tag{A.4}$$

Per mantenere consistenza nella IP, definiamo il vettore di stato come

$$|\psi(t)\rangle_I = e^{i\hat{H}_0 t} |\psi(t)\rangle \tag{A.5}$$

così che

$$\begin{aligned}
i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I &= e^{i\hat{H}_0 t} \left\{ -\hat{H}_0 |\psi(t)\rangle + i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle \right\} \\
&= e^{i\hat{H}_0 t} \left\{ -\hat{H}_0 |\psi(t)\rangle + \hat{H} |\psi(t)\rangle \right\} \\
&= e^{i\hat{H}_0 t} \left\{ -\hat{H}_0 |\psi(t)\rangle + (\hat{H}_0 + \hat{H}') |\psi(t)\rangle \right\} \\
&= e^{i\hat{H}_0 t} \left\{ \hat{H}' |\psi(t)\rangle \right\}
\end{aligned}$$

introducendo lo stato in rappresentazione d'interazione A.5 possiamo scrivere:

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{H}' \left( e^{-i\hat{H}_0 t} |\psi(t)\rangle_I \right)$$

usando la def. A.4 diventa

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I = \hat{H}'_I(t) |\psi(t)\rangle_I \quad (\text{A.6})$$

Si può notare come  $\hat{H}'_I(t)$  abbia una dipendenza temporale legata all'evoluzione dell'Hamiltoniana libera, proprio come volevamo avere secondo le regole di costruzione della IP.

Possiamo ora procedere con l'applicazione del formalismo della rappresentazione d'interazione agli eventi che studieremo perturbativamente.

Un processo di scattering può essere descritto in questo modo: al tempo  $t \rightarrow -\infty$ , molto prima quindi che avvenga qualsiasi interazione, possiamo trascurare per definizione la componente  $H'_I(t)$  dell'Hamiltoniana, così che  $|\psi(-\infty)\rangle_I$  sia un autostato di  $H_0$ ; lo rinomineremo per comodità in  $|i\rangle$ .

Al tempo  $t \rightarrow +\infty$ , molto dopo gli eventuali processi occorsi nell'interazione, possiamo pensare di ritrovare un altro stato costante, un autostato quindi di  $H_0$ . In generale sono accessibili più stati finali a partire dalle stesse condizioni iniziali. Denoteremo pertanto con  $|\psi(+\infty)\rangle_I$  la sovrapposizione delle varie componenti  $|f\rangle$  possibili.

Definiamo ora un operatore  $\hat{S}$  tale che

$$|\psi(+\infty)\rangle_I = \hat{S} |\psi(-\infty)\rangle_I = \hat{S} |i\rangle$$

Un elemento di questa matrice descrive pertanto l'ampiezza di probabilità di transizione da uno stato  $|i\rangle$  ad uno stato  $|f\rangle$ , in modo che possiamo scrivere

$$\langle f | \hat{S} | i \rangle = S_{fi}$$

$$|\psi(+\infty)\rangle_I = \sum_f |f\rangle \langle f | \hat{S} | i \rangle = \sum_f S_{fi} |f\rangle \quad (\text{A.7})$$

Prima di procedere oltre verifichiamo le proprietà di  $S$ . Assumiamo che  $|i\rangle$  e  $|\psi(+\infty)\rangle_I$  siano normalizzati. Allora avremo che

$$1 = {}_I \langle \psi(+\infty) | \psi(+\infty) \rangle_I = \langle i | \hat{S}^\dagger \hat{S} | i \rangle = \langle i | i \rangle$$

Si può dedurre immediatamente che  $\hat{S}$  è unitario, valendo la relazione

$$\hat{S}^\dagger \hat{S} =$$

In questo caso possiamo scrivere la seguente relazione per gli elementi di  $\hat{S}$ :

$$\sum_k S_{kf}^* S_{ki} = \delta_{fi}$$

Per  $f = i$  risulta  $\sum_k S_{ki}^* S_{ki} = \sum_k |S_{ki}|^2 = 1$ . Questo ci conferma che la somma di tutte le probabilità parziali riportate in A.7 deve risultare 1.

Possiamo ora procedere a calcolare  $\hat{S}$  sfruttando un metodo perturbativo. Integriamo la A.6 ottenuta prima e, sfruttando quanto già detto per lo stato a  $t_0 \rightarrow -\infty$ , otteniamo:

$$\begin{aligned} i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I &= \hat{H}'_I(t) |\psi(t)\rangle_I \\ \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I &= -i \hat{H}'_I(t) |\psi(t)\rangle_I \\ |\psi(t)\rangle_I &= |\psi(t_0)\rangle_I - i \int_{t_0}^t \hat{H}'_I(t') |\psi(t')\rangle_I dt' \end{aligned}$$

dove  $|\psi(t_0)\rangle_I$  è una costante derivata dal calcolo dell'integrale, secondo la regola

$$F(t_0 + t_1) = F(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} f(t) dt$$

Mandando appunto  $t_0 \rightarrow -\infty$  risulta

$$|\psi(t)\rangle_I = |\psi(-\infty)\rangle_I - i \int_{-\infty}^t \hat{H}'_I(t') |\psi(t')\rangle_I dt' \quad (\text{A.8})$$

Per risolvere quest'equazione utilizziamo un metodo iterativo: all'ordine zero trascuriamo completamente  $\hat{H}'_I$ ; questa scelta ci elimina il problema dell'integrale ed è giustificata dalla applicabilità del metodo perturbativo ( $\hat{H}'_I$  appporta piccole correzioni):

$$|\psi(t)\rangle_I^{(0)} = |\psi(-\infty)\rangle_I = |i\rangle \quad (\text{A.9})$$



Come correzione di prim'ordine a questo risultato, possiamo inserire A.9 in A.8 al posto di  $|\psi(t')\rangle_I$

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle_I^{(1)} &= |i\rangle - i \int_{-\infty}^t \hat{H}'_I(t') |i\rangle dt' \\ &= |i\rangle \left\{ 1 + \int_{-\infty}^t (-i) \hat{H}'_I(t') dt' \right\} \end{aligned}$$

Ripetendo l'operazione e portando  $t \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \hat{S}|i\rangle &= |\psi(t \rightarrow +\infty)\rangle_I \\ &= |i\rangle \left\{ 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} (-i) \hat{H}'_I(t_1) dt_1 \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 (-i) \hat{H}'_I(t_1) (-i) \hat{H}'_I(t_2) \right\} \\ \hat{S} &= 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 (-i) \hat{H}'_I(t_1) + \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 (-i) \hat{H}'_I(t_1) (-i) \hat{H}'_I(t_2) \quad (\text{A.10}) \end{aligned}$$

Se vogliamo includere tutti gli ordini successivi, possiamo riscrivere gli infiniti termini in cui viene sviluppato l'operatore  $\hat{S}$  in questa forma:

$$\hat{S} = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n \cdot \hat{H}'_I(t_1) \hat{H}'_I(t_2) \dots \hat{H}'_I(t_n) \quad (\text{A.11})$$

C'è infine un ulteriore passaggio che possiamo fare, sfruttando la definizione di densità di Hamiltoniana:

$$\hat{H}'_I(t) = \int \hat{\mathcal{H}}'_I(\mathbf{x}, t) d^3 \mathbf{x} \quad (\text{A.12})$$

che ci può rendere l'espressione molto più simmetrica rispetto alle coordinate spazio-temporali: proviamo a riscrivere il secondo termine della A.10 sfruttando la A.12

$$\iint_{t_1 > t_2} d^4 x_1 d^4 x_2 (-i \hat{\mathcal{H}}'_I(x_1)) (-i \hat{\mathcal{H}}'_I(x_2)) \quad (\text{A.13})$$

È possibile [1, 3] rimuovere i limiti di integrazione in  $t$  e ripristinare una simmetria nelle dimensioni dell'integrale. Sfruttiamo perciò il simbolo di ordinamento temporale  $T$  per estendere i limiti da  $-\infty$  a  $+\infty$  come quelli in  $x$ .

$$\hat{S} = 1 + \int d^4 x_1 (-i) \hat{\mathcal{H}}'_I(x_1) + \frac{1}{2} \iint d^4 x_1 d^4 x_2 T \left[ (-i \hat{\mathcal{H}}'_I(x_1)) (-i \hat{\mathcal{H}}'_I(x_2)) \right]$$

Estendendo il discorso alla A.11 otteniamo l'espansione di Dyson dell'operatore  $\hat{S}$ :

$$\begin{aligned}\hat{S} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \dots \int d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n T \left[ \hat{\mathcal{H}}'_I(x_1) \hat{\mathcal{H}}'_I(x_2) \dots \hat{\mathcal{H}}'_I(x_n) \right] \\ &= T \left\{ \exp \left[ -i \int d^4x' \mathcal{H}'_I(x') \right] \right\}\end{aligned}\quad (\text{A.14})$$

dove l'ordinamento temporale dell'esponenziale è definito come la serie di Taylor con ciascun termine ordinato temporalmente.

## A.1 Lo stato fondamentale nella rappresentazione di interazione

$|\Omega\rangle$  è lo stato fondamentale di  $H$ . Partiamo dallo stato fondamentale dell'Hamiltoniana libera,  $H_0$ , ed evolviamolo con l'Hamiltoniana 'intera', quella che include anche i termini di interazione:

$$e^{-iHt}|0\rangle = \sum_n e^{-iE_n t} |n\rangle \langle n|0\rangle \quad (\text{A.15})$$

dove  $E_n$  sono gli autovalori di  $H$  ed  $|n\rangle$  gli autostati. Assumendo che  $H_I$  per ipotesi sia una piccola perturbazione, sicuramente ci deve essere con questa costruzione una sovrapposizione tra i diversi stati fondamentali delle due Hamiltoniane:

$$\langle \Omega|0\rangle \neq 0$$

Perciò possiamo riscrivere la serie A.15 in questo modo: partiamo da un'espansione della stessa e poi ridefiniamo lo zero dell'energia come l'autovalore dell'Hamiltoniana libera sul suo stato fondamentale; risulta chiaro che, per  $n = 0$ , l'unico contributo del termine con l'Hamiltoniana completa è quello legato alla sua differenza con questo nuovo stato fondamentale.

$$\begin{aligned}e^{-iHt}|0\rangle &= \overbrace{e^{-iE_0 t}|0\rangle \langle 0|0\rangle}^{\text{termine per } n=0} + \sum_{n>0} e^{-iE_n t} |n\rangle \langle n|0\rangle \\ &= e^{-iE_0 t} |\Omega\rangle \langle \Omega|0\rangle + \sum_{n>0} e^{-iE_n t} |n\rangle \langle n|0\rangle\end{aligned}\quad (\text{A.16})$$

Mandando  $t \rightarrow +\infty$ , tutti i fattori  $e^{-iE_n t}$  tendono a zero; siccome per definizione  $E_{n+1} > E_n$ , allora  $e^{-iE_0 t}$  è il termine che ci va meno rapidamente di tutta la serie. Rimane dunque questa approssimazione

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-iHt}|0\rangle \cong \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-iE_0 t} |\Omega\rangle \langle \Omega|0\rangle$$

dalla quale si ricava

$$|\Omega\rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-iHt}|0\rangle}{e^{-iE_0t}\langle\Omega|0\rangle} \quad (\text{A.17})$$

Siccome  $t$  è molto grande, possiamo addizionargli una costante  $t_0$  senza introdurre alcun problema.

$$\begin{aligned} |\Omega\rangle &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-iH(t+t_0)}|0\rangle}{e^{-iE_0(t+t_0)}\langle\Omega|0\rangle} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-iH(t_0-(-t))} \overbrace{e^{-iH_0(-t-t_0)}^{H_0|0\rangle=0}}{|0\rangle}}{e^{-iE_0(t_0-(-t))}\langle\Omega|0\rangle} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W(t_0, -t)|0\rangle}{e^{-iE_0(t_0-(-t))}\langle\Omega|0\rangle} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

dove abbiamo definito per comodità l'operatore

$$W(t, t_0) = e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)} \quad (\text{A.19})$$

Allo stesso modo possiamo scrivere  $\langle\Omega|$ :

$$\langle\Omega| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle 0|W(t, t_0)}{\langle 0|\Omega\rangle e^{-iE_0(t-t_0)}} \quad (\text{A.20})$$

Prima di ritornare alla funzione di Green, proviamo a scrivere gli operatori di campo sfruttando la definizione A.19. Noto un operatore di campo ad un tempo fissato,  $\phi(t_0, \mathbf{x})$ , per ottenerlo a  $t \neq t_0$  possiamo usare la rappresentazione di Heisenberg e avere

$$\phi(t, \mathbf{x}) = e^{iH(t-t_0)}\phi(t_0, \mathbf{x})e^{-iH(t-t_0)} \quad (\text{A.21})$$

Per  $\lambda = 0$ ,  $H$  diventa  $H_0$  e la A.21 si riduce a

$$\phi(t, \mathbf{x})|_{\lambda=0} = e^{iH_0(t-t_0)}\phi(t_0, \mathbf{x})e^{-iH_0(t-t_0)} \equiv \phi_I(t, \mathbf{x}) \quad (\text{A.22})$$

Se vogliamo esprimere  $\phi_I(t, \mathbf{x})$  in funzione di  $\phi(t, \mathbf{x})$  è sufficiente combinare le relazioni A.21 e A.22, che, combinate con A.19, risultano:

$$\begin{aligned} \phi(t, \mathbf{x}) &= e^{iH(t-t_0)}e^{-iH_0(t-t_0)}\phi_I(t, \mathbf{x})e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)} \\ &= W^\dagger(t, t_0)\phi_I(t, \mathbf{x})W(t, t_0) \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Ricostruiamo ora la funzione di correlazione, assumendo per un attimo che  $x^0 > y^0 > t_0$  (vedremo poi che questa condizione potrà essere rimossa senza problemi):

$$\langle\Omega|\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\langle 0|W(t, t_0)}{\langle 0|\Omega\rangle e^{-iE_0(t-t_0)}} \phi(x)\phi(y) \frac{W(t_0, -t)|0\rangle}{e^{-iE_0(t_0-(-t))}\langle\Omega|0\rangle} \right\}$$

Inserendo la relazione A.23 diventa:

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\langle 0 | W(t, t_0) \rangle}{\langle 0 | \Omega \rangle e^{-iE_0(t-t_0)}} [W(x^0, t_0)]^\dagger \phi_I(x) W(x^0, t_0) \right. \\ \left. [W(y^0, t_0)]^\dagger \phi_I(y) W(y^0, t_0) \frac{W(t_0, -t) | 0 \rangle}{e^{-iE_0(t_0-(-t))} \langle \Omega | 0 \rangle} \right\}$$

Combinando gli operatori  $W$  di evoluzione temporale e riordinando i termini, si può riscrivere il precedente risultato come:

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \langle 0 | W(t, x^0) \phi_I(x) W(x^0, y^0) \phi_I(y) W(y^0, -t) | 0 \rangle \right. \\ \left. \frac{1}{\langle 0 | \Omega \rangle e^{-iE_0(t-t_0)}} \frac{1}{e^{-iE_0(t_0-(-t))} \langle \Omega | 0 \rangle} \right\} \quad (\text{A.24})$$

Siccome  $\langle \Omega | 0 \rangle = \langle 0 | \Omega \rangle$  per le proprietà del prodotto scalare, si ottengono due coefficienti identici davanti agli esponenziali. Combinando i termini all'esponente scompare la costante  $t_0$  che avevamo addizionato al tempo all'inizio così come speravamo, dato che era un'aggiunta per comodità.

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \langle 0 | W(t, x^0) \phi_I(x) W(x^0, y^0) \phi_I(y) W(y^0, -t) | 0 \rangle \right. \\ \left. \frac{1}{(\langle 0 | \Omega \rangle)^2 \cdot e^{-iE_0 2t}} \right\} \quad (\text{A.25})$$

Per eliminare il denominatore nella A.25 è sufficiente sfruttare le definizioni A.18 e A.20, sapendo che gli stati sono normalizzati.

$$1 = \langle \Omega | \Omega \rangle = (|\langle 0 | \Omega \rangle|^2 e^{-iE_0 2t})^{-1} \langle 0 | W(t, t_0) W(t_0, -t) | 0 \rangle \quad (\text{A.26})$$

Dividiamo dunque A.25 per A.26. Otteniamo così:

$$\langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle 0 | W(t, x^0) \phi_I(x) W(x^0, y^0) \phi_I(y) W(y^0, -t) | 0 \rangle}{\langle 0 | W(t, t_0) W(t_0, -t) | 0 \rangle} \quad (\text{A.27})$$

Notiamo che entrambe le parti della precedente equazione hanno gli operatori ordinati temporalmente in modo identico. Introducendo il simbolo  $T$  che ci garantisce l'ordine, possiamo rimuovere l'ipotesi di prima, e cioè che  $x^0 > y^0 > t_0$ . È dimostrabile [1, 3] che  $W$  è una soluzione dell'equazione di Schrödinger e che, in quanto tale, è legata ad  $S$  A.14 da una condizione di limite: la matrice  $S$  è semplicemente l'operatore di evoluzione temporale  $W$  nel limite di tempi molto lunghi ( $t \rightarrow \infty$ ). Riunendo gli operatori  $W$

al denominatore di A.27 così come già fatto per A.24 giungiamo alla forma finale:

$$\langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle 0 | T \left\{ \phi_I(x) \phi_I(y) \exp \left[ -i \int_{-t}^t dt_1 H_I(t_1) \right] \right\} | 0 \rangle}{\langle 0 | T \left\{ \exp \left[ -i \int_{-t}^t dt_1 H_I(t_1) \right] \right\} | 0 \rangle} \quad (\text{A.28})$$



## Il teorema di Wick

Il teorema di Wick [7] è uno strumento che permette di esprimere il prodotto cronologico di operatori di campi in termini di prodotto normale e di contrazioni. Semplifica notevolmente i calcoli che incontriamo nello studio delle funzioni di Green.

$$T \{ \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \dots \phi_I(x_n) \} = N \{ \phi_I(x_1) \phi_I(x_2) \dots \phi_I(x_n) \\ + \text{tutte le possibili contrazioni} \}$$

dove  $N$  è il simbolo di ordinamento normale del prodotto dei campi, con i distruttori che li compongono alla destra dei costruttori, così da garantire sempre un valore d'aspettazione sul vuoto (Vacuum Expectation Value – VEV) nullo:

$$\underbrace{\langle 0 | a_k^\dagger}_{\text{il costruttore sul bra vuoto dà 0}} \underbrace{a_q | 0 \rangle}_{\text{il distruttore sul ket vuoto dà 0}} = 0$$

Una contrazione è invece definita come

$$\overline{\phi_I(x_1) \phi_I(x_2)} \equiv \begin{cases} [\phi_I^+(x), \phi_I^-(y)] & \text{se } x^0 > y^0 \\ [\phi_I^+(y), \phi_I^-(x)] & \text{se } y^0 > x^0 \end{cases}$$

dove  $\phi_I^+$  e  $\phi_I^-$  sono la decomposizione, sempre possibile, del campo originale  $\phi_I$ , tale che

$$\phi_I^+(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} a_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x}$$

$$\phi_I^-(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}} a_{\vec{p}}^\dagger e^{+ip \cdot x}$$

Come si può notare, una contrazione è esattamente identica ad un propagatore di Feynman.







## Il propagatore del fotone e la libertà di gauge

Se proviamo ad invertire il termine cinetico del fotone nella Lagrangiana della QED (3.1), a causa della libertà di gauge giungiamo ad un problema:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} &= \frac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = \\ &= \frac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\nu A^\mu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu + \partial^\nu A^\mu \partial_\nu A_\mu) \\ \\ iS &= i \int d^4x \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \\ &= \frac{i}{4} \left( \int d^4x \partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \int d^4x \partial^\nu A^\mu \partial_\mu A_\nu \right. \\ &\quad \left. - \int d^4x \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu + \int d^4x \partial^\nu A^\mu \partial_\nu A_\mu \right) = \\ &= \frac{i}{4} \int d^4x \partial^\mu \left( \int dk e^{-ik \cdot x} \tilde{A}^\nu(k) \right) \partial_\mu \left( \int dq e^{-iq \cdot x} \tilde{A}_\nu(q) \right) - \\ &\quad - \frac{i}{4} \int d^4x \partial^\nu \left( \int dk e^{-ik \cdot x} \tilde{A}^\mu(k) \right) \partial_\mu \left( \int dq e^{-iq \cdot x} \tilde{A}_\nu(q) \right) - \\ &\quad - \frac{i}{4} \int d^4x \partial^\mu \left( \int dk e^{-ik \cdot x} \tilde{A}^\nu(k) \right) \partial_\nu \left( \int dq e^{-iq \cdot x} \tilde{A}_\mu(q) \right) + \\ &\quad + \frac{i}{4} \int d^4x \partial^\nu \left( \int dk e^{-ik \cdot x} \tilde{A}^\mu(k) \right) \partial_\nu \left( \int dq e^{-iq \cdot x} \tilde{A}_\mu(q) \right) =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
iS &= \frac{i}{4} \int dk dq (-ik^\mu) (-iq_\mu) \tilde{A}^\nu(k) \tilde{A}_\nu(q) \delta(k+q) - \\
&- \frac{i}{4} \int dk dq (-ik^\nu) (-iq_\mu) \tilde{A}^\mu(k) \tilde{A}_\nu(q) \delta(k+q) - \\
&- \frac{i}{4} \int dk dq (-ik^\mu) (-iq_\nu) \tilde{A}^\nu(k) \tilde{A}_\mu(q) \delta(k+q) + \\
&+ \frac{i}{4} \int dk dq (-ik^\nu) (-iq_\nu) \tilde{A}^\mu(k) \tilde{A}_\mu(q) \delta(k+q) = \\
&= -\frac{i}{4} \int dk (-k^\mu) (-k_\mu) \tilde{A}^\nu(k) \tilde{A}_\nu(-k) + \\
&+ \frac{i}{4} \int dk (-k^\nu) (-k_\mu) \tilde{A}^\mu(k) \tilde{A}_\nu(-k) + \\
&+ \frac{i}{4} \int dk (-k^\mu) (-k_\nu) \tilde{A}^\nu(k) \tilde{A}_\mu(-k) - \\
&- \frac{i}{4} \int dk (-k^\nu) (-k_\nu) \tilde{A}^\mu(k) \tilde{A}_\mu(-k) = \\
&= -\frac{i}{4} \int dk \tilde{A}^\nu(k) k^2 \tilde{A}_\nu(-k) + \\
&+ \frac{i}{4} \int dk k^\nu k_\mu \tilde{A}^\mu(k) \tilde{A}_\nu(-k) + \\
&+ \frac{i}{4} \int dk k^\mu k_\nu \tilde{A}^\nu(k) \tilde{A}_\mu(-k) - \\
&- \frac{i}{4} \int dk \tilde{A}^\mu(k) k^2 \tilde{A}_\mu(-k) = \\
&= -\frac{i}{2} \int dk \tilde{A}^\nu(k) k^2 \tilde{A}_\nu(-k) + \\
&+ \frac{i}{2} \int dk k^\nu k_\mu \tilde{A}^\mu(k) \tilde{A}_\nu(-k) = \\
&= -\frac{i}{2} \int dk (2\pi)^4 (\delta_\mu^\nu k^2 - k^\nu k_\mu) \left( \tilde{A}^\mu(k) \tilde{A}_\nu(-k) \right)
\end{aligned}$$

Possiamo dimostrare che il termine ottenuto non è invertibile sfruttando le proprietà algebriche che mi dicono che non lo è se ha un autovettore con autovalore nullo

$$(\delta_\mu^\nu k^2 - k^\nu k_\mu) k_\nu = k^2 k_\mu - k^2 k_\mu = 0$$

*c.v.d.*

La soluzione risiede nel fare un cosiddetto *gauge fixing*, descritto nel capitolo 3.1



## Metodi di regolarizzazione

Le regole di Feynman portano a integrali palesemente divergenti sui momenti dei loop, per  $k \rightarrow +\infty$ . Sono le divergenze ultraviolette della teoria dei campi. Se sono coinvolte anche particelle senza massa riscontriamo anche divergenze infrarosse, cioè per  $k \rightarrow 0$ , che non andremo a trattare in quest'appendice. Per risolvere questi problemi e riportare le teorie in grado di fare previsioni e permettere di calcolare, sono stati studiati metodi di regolarizzazione e rinormalizzazione.

Ai fini di una semplice presentazione, tratteremo in quest'appendice solo la regolarizzazione con cut-off e quella dimensionale. Per scopo informativo riportiamo in bibliografia l'articolo originale che descrive la regolarizzazione col metodo di Pauli–Villars [33].

### D.1 La regolarizzazione con cut-off

Questo metodo di regolarizzazione è sicuramente il più intuitivo e fisicamente motivato. Si basa sul principio, sicuramente plausibile, che i fondamenti della teoria dei campi e della teoria classica della gravitazione basata sulla relatività generale non possano essere spinti fino ad energie molto elevate, quali ad esempio la massa di Planck alla quale molti ritengono possa comparire “nuova fisica” ( $M_P \approx 10^{19}$  GeV).

Se ci fidiamo della teoria dei campi e della relatività generale fino alla massa di Planck ma non oltre, diventa sensato *tagliare* l'integrazione ad un momento limite.

Vediamone un esempio semplice, con un *tadpole* scalare (teoria  $\frac{\lambda}{4!}\phi^4$ )


(D.1)

Per risolvere l'integrale in  $d^4l$  dobbiamo prima introdurre le *funzioni gamma di Eulero*.

Innanzitutto, dallo studio degli integrali gaussiani, sappiamo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi} \quad (D.2)$$

Perciò, noto in tre dimensioni che

$$d\vec{x} = dx dy dz = r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi = r^2 dr d\Omega_3$$

se vogliamo risolvere D.2 in 3 dimensioni abbiamo che

$$\begin{aligned} \int d^3x e^{-x^2} &= \int d^3x e^{-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)} = \\ &= \prod_{j=1}^3 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_j e^{-x_j^2} = \\ &= (\sqrt{\pi})^3 = \pi^{3/2} \end{aligned} \quad (D.3)$$

$$\begin{aligned} \int d^3x e^{-x^2} &= \int d\Omega_3 \int_0^{+\infty} dx x^2 e^{-x^2} = \\ &\text{facendo la sostituzione } y = x^2 \rightarrow dx = \frac{1}{2} \frac{dy}{\sqrt{y}} \\ &= \frac{1}{2} \int d\Omega_3 \underbrace{\int_0^{+\infty} dy y^{\frac{n}{2}-1} e^{-y}}_{\Gamma(\frac{3}{2})} \end{aligned} \quad (D.4)$$

Combinando i risultati di D.3 e di D.4 possiamo scrivere

$$\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \int d\Omega_3 = \pi^{3/2} \quad (D.5)$$

Estendendo la D.5 al caso n-dimensionale otteniamo

$$\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \int d\Omega_n = \pi^{n/2} \quad (D.6)$$

Nota  $\Gamma(D)$  dalla relazione

$$\Gamma(D) = \int_0^{+\infty} dx x^{D-1} e^{-x} \quad (D.7)$$

d	$\Gamma(d/2)$	$\int d\Omega_d$
1	$\sqrt{\pi}$	2
2	1	$2\pi$
3	$\sqrt{\pi}/2$	$4\pi$
4	1	$2\pi^2$
n	$\int_0^{+\infty} dx x^{D-1} e^{-x}$	$\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$

Tabella D.1: Valori tipici funzione  $\Gamma$  di Eulero e dell'integrale gaussiano d-dimensionale

possiamo scrivere la tabella riassuntiva D.1.

Possiamo ora provare a calcolare il termine legato al diagramma D.1

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (-i\lambda) \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{i}{l^2 - m^2 + i\epsilon} = \\ & = \frac{1}{2} (-i\lambda) \int \frac{dl_0 d\vec{l}}{(2\pi)^4} \frac{i}{l_0^2 - \vec{l}^2 - m^2 + i\epsilon} = \end{aligned}$$

passiamo alle coordinate eucldee con una rotazione di Wick  $l_0 \rightarrow -il_4$

$$= \frac{1}{2} (-i\lambda) (-i) \int \frac{dl_4 d\vec{l}}{(2\pi)^4} \frac{i}{-l_4^2 - \vec{l}^2 - m^2 + i\epsilon} =$$

introduciamo  $l_E \equiv (l_4, \vec{l})$

$$= \frac{1}{2} (-i\lambda) \int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{-l_E^2 - m^2 + i\epsilon} =$$

rimuoviamo l' $i\epsilon$  non più necessario e portiamo il  $-$  dentro l'integrale

$$= \frac{i\lambda}{2} \int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{l_E^2 + m^2} = \frac{i\lambda}{2} \int \frac{d\Omega_4}{(2\pi)^4} \int_0^{+\infty} dl \frac{l^3}{l^2 + m^2} =$$

$$\stackrel{R}{=} \frac{i\lambda}{2} \frac{2\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^\Lambda dl \frac{l^3}{l^2 + m^2} = \frac{i\lambda}{16\pi^2} \int_0^\Lambda dl \frac{l l^2}{l^2 + m^2} =$$

siccome  $d(l^2) = 2l dl$

$$= \frac{i\lambda}{32\pi^2} \int_0^{\Lambda^2} d(l^2) \frac{l^2}{l^2 + m^2} = \frac{i\lambda}{32\pi^2} \int_0^{\Lambda^2} d(l^2) \left\{ \frac{l^2 + m^2}{l^2 + m^2} - \frac{m^2}{l^2 + m^2} \right\} =$$

$$= \frac{i\lambda}{32\pi^2} \int_0^{\Lambda^2} d(l^2) \left\{ 1 - \frac{m^2}{l^2 + m^2} \right\} = \frac{i\lambda\Lambda^2}{32\pi^2} - \frac{i\lambda m^2}{32\pi^2} \int_0^{\Lambda^2} d(l^2) \frac{1}{l^2 + m^2} =$$

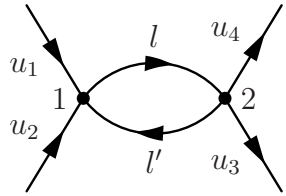
$$= \frac{i\lambda\Lambda^2}{32\pi^2} - \frac{i\lambda m^2}{32\pi^2} \ln(l^2 + m^2) \Big|_0^{\Lambda^2} = \frac{i\lambda}{32\pi^2} \left\{ \Lambda^2 - m^2 \ln \left( 1 + \frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \right\} \quad (D.8)$$

## D.2 La regolarizzazione dimensionale

La tecnica della regolarizzazione dimensionale è stata inventata da G. 't Hooft e da Veltman [34, 35, 36] nel 1972.

L'idea fondamentale alla base di questo strumento è molto semplice: riducendo il numero di dimensioni sulle quali svolgiamo l'integrazione, la divergenza può banalmente sparire. Possiamo quindi dare un significato preciso ad alcuni integrali su loop attraverso il metodo della continuazione analitica nel numero di dimensioni spazio-temporali, portandole da  $D \in \mathbb{N}$  a  $2\omega \in \mathbb{C}$ . Così facendo, le divergenze appaiono come poli nel piano complesso  $\omega$ .

Vediamone un esempio basato sul calcolo del loop nel cosiddetto diagramma *a caramella*:



$$(D.9)$$

Dobbiamo prima definire per comodità la *trasformata di Mellin*:

$$a^{-z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{+\infty} dt t^{z-1} e^{-at} \quad (D.10)$$

Dalla rappresentazione in serie di prodotti della D.7 otteniamo:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\mathbf{C}z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n} \quad (D.11)$$

tale che

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \mathbf{C} + o(\epsilon^2) \quad (D.12)$$

dove  $\mathbf{C}$  è la costante di Eulero-Mascheroni ( $\mathbf{C} \approx 0.5772$ ).

Definiamo inoltre la parametrizzazione di Feynman in questo modo:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2} = \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{[xA + yB]^2} \quad (D.13)$$

Innanzitutto, vediamo che nel vertice 1 del diagramma a caramella, per la conservazione dei momenti, vale la seguente relazione

$$\delta(u_1 + u_2 + l' - l) = \delta(k + l' - l) \rightarrow l' = l - k$$

Proviamo ora a regolarizzare la divergenza dell'integrale sul loop:

$$I = \frac{1}{2}(-i\lambda)^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{i}{l^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{i}{(l-k)^2 - m^2 + i\epsilon}$$

facciamo la rotazione di Wick  $l_0 = -il_4$ ,  $l_E \equiv (l_4, \vec{l})$ ,  $l_E \cdot l_E = l_E^2 = l_4^2 + \vec{l}^2$ ; idem faremo per  $k$ .

$$\begin{aligned} I &= (-i\lambda)^2 \frac{1}{2} (-i) \int \frac{dl_E}{(2\pi)^4} \frac{i}{-l_4^2 - \vec{l}^2 - m^2 + i\epsilon} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{i}{-(l_4 - k_4)^2 - (\vec{l} - \vec{k})^2 - m^2 + i\epsilon} = \\ &= \frac{-i\lambda^2}{2} \int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{l_E^2 + m^2} \frac{1}{(l_E - k_E)^2 + m^2} \end{aligned}$$

Applichiamo la regolarizzazione di 't Hooft–Veltman e introduciamo un parametro arbitrario  $\mu$  per poter mantenere l'integrale adimensionale pur cambiando le dimensioni di integrazione.

$$I \stackrel{R}{=} \frac{-i\lambda^2}{2} \mu^{4-2\omega} \int \frac{d^{2\omega} l}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{l_E^2 + m^2} \frac{1}{(l_E - k_E)^2 + m^2} \quad (\text{D.14})$$

Introduciamo la parametrizzazione di Feynman D.13 al denominatore della D.14 e otteniamo:

$$I = \frac{-i\lambda^2}{2} \frac{\mu^{4-2\omega}}{(2\pi)^{2\omega}} \int d^{2\omega} l_E \int_0^1 \frac{dx}{\{x(l_E^2 + m^2) + (1-x)[(l_E - k_E)^2 + m^2]\}^2} \quad (\text{D.15})$$

Facciamo la sostituzione  $l_E \rightarrow l'_E + (1-x)k_E$ ; la D.15 diventa pertanto:

$$\begin{aligned} I &= \frac{-i\lambda^2}{2} \frac{\mu^{4-2\omega}}{(2\pi)^{2\omega}} \int_0^1 dx \int d^{2\omega} l'_E \frac{1}{[l'^2_E + x(1-x)k_E^2 + m^2]^2} = \\ &\quad \text{poniamo } \Delta^2 = m^2 + x(1-x)k_E^2 \\ &= \frac{-i\lambda^2}{2} \frac{\mu^{4-2\omega}}{(2\pi)^{2\omega}} \int_0^1 dx \int d^{2\omega} l'_E \frac{1}{[l'^2_E + \Delta^2]^2} \quad (\text{D.16}) \end{aligned}$$

Applichiamo la trasformata di Mellin D.10 alla D.16

$$\begin{aligned} I &= \frac{-i\lambda^2}{2} \frac{\mu^{4-2\omega}}{(2\pi)^{2\omega}} \int_0^1 dx \int d^{2\omega} l'_E \frac{1}{\Gamma(2)} \int_0^{+\infty} dt t e^{-t(l'^2_E + \Delta^2)} = \\ &= \frac{-i\lambda^2}{2} \frac{\mu^{4-2\omega}}{(2\pi)^{2\omega}} \int_0^1 dx \frac{1}{\Gamma(2)} \int_0^{+\infty} dt t e^{-t\Delta^2} \int d^{2\omega} l'_E e^{-tl'^2_E} \quad (\text{D.17}) \end{aligned}$$

Dalla tabella D.1 otteniamo che  $\Gamma(2) = 1$ ; facciamo inoltre anche questa sostituzione:  $tl'_E{}^2 = p_E^2 \rightarrow d^{2\omega}l'_E = d^{2\omega}p_E/t^\omega$

$$\begin{aligned}
I &= \frac{-i\lambda^2}{2} \frac{\mu^{4-2\omega}}{(2\pi)^{2\omega}} \int_0^1 dx \int_0^{+\infty} dt t e^{-t\Delta^2} \frac{1}{t^\omega} \underbrace{\int d^{2\omega}p_E e^{-p_E^2}}_{(\pi^{1/2})^{2\omega} = \pi^\omega} \\
&= \frac{-i\lambda^2 \mu^{4-2\omega} \pi^\omega}{2 2^{2\omega} \pi^{2\omega}} \int_0^1 dx \int_0^{+\infty} dt t^{1-\omega} e^{-t\Delta^2} = \\
&= \frac{-i\lambda^2 \mu^{4-2\omega}}{2^{2\omega+1} \pi^\omega} \int_0^1 dx \int_0^{+\infty} dt t^{1-\omega} e^{-t\Delta^2} = \\
&\text{sia } \omega = 2 - \epsilon \\
&= \frac{-i\lambda^2 \mu^{2\epsilon}}{2^{5-2\epsilon} \pi^{2-\epsilon}} \int_0^1 dx \int_0^{+\infty} dt t^{\epsilon-1} e^{-t\Delta^2} \tag{D.18}
\end{aligned}$$

Per procedere più agevolmente poniamo ora  $t\Delta^2 = \tau \rightarrow dt = d\tau/\Delta^2$

$$\begin{aligned}
I &= \frac{-i\lambda^2 \mu^{2\epsilon}}{2^{5-2\epsilon} \pi^{2-\epsilon}} \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^2} \int_0^{+\infty} d\tau \left(\frac{\tau}{\Delta^2}\right)^{\epsilon-1} e^{-\tau} = \\
&= \frac{-i\lambda^2 \mu^{2\epsilon}}{2^{5-2\epsilon} \pi^{2-\epsilon}} \int_0^1 dx \Delta^{-2} \Delta^{2-2\epsilon} \int_0^{+\infty} d\tau \tau^{\epsilon-1} e^{-\tau} = \\
&= \frac{-i\lambda^2 \mu^{2\epsilon}}{2^{5-2\epsilon} \pi^{2-\epsilon}} \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2\epsilon}} \int_0^{+\infty} d\tau \tau^{\epsilon-1} e^{-\tau} \tag{D.19}
\end{aligned}$$

Riconosciamo nell'ultimo termine di D.19 la definizione D.7 di  $\Gamma(\epsilon)$  che andiamo ad inserire:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{-i\lambda^2 \mu^{2\epsilon}}{2^{5-2\epsilon} \pi^{2-\epsilon}} \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2\epsilon}} \Gamma(\epsilon) = \\
&\text{riespandiamo il } \Delta \\
&= \frac{-i\lambda^2 \mu^{2\epsilon}}{2^{5-2\epsilon} \pi^{2-\epsilon}} \Gamma(\epsilon) \int_0^1 dx \frac{1}{(m^2 + x(1-x)k_E^2)^\epsilon} \tag{D.20}
\end{aligned}$$

Inseriamo la definizione D.12 e riordiniamo i termini iniziali dell'espressione per ottenere:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{-i\lambda^2}{2^5 \pi^2} (4\pi\mu^2)^\epsilon \left( \frac{1}{\epsilon} - C + o(\epsilon^2) \right) \int_0^1 dx \frac{1}{(m^2 + x(1-x)k_E^2)^\epsilon} \\
&= \frac{-i\lambda^2}{32\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} - C + o(\epsilon^2) \right) \int_0^1 dx \frac{1}{\left( \frac{(m^2 + x(1-x)k_E^2)}{(4\pi\mu^2)} \right)^\epsilon} \tag{D.21}
\end{aligned}$$



Il termine integrando di D.21 è ora  $> 0$  e adimensionale. Possiamo così sfruttare le proprietà dei logaritmi per risolverlo.

$$\begin{aligned} I &= \frac{-i\lambda^2}{32\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} - C + o(\epsilon^2) \right) \int_0^1 dx \left( e^{\ln \frac{m^2 + x(1-x)k_E^2}{4\pi\mu^2}} \right)^{-\epsilon} = \\ &= \frac{-i\lambda^2}{32\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} - C + o(\epsilon^2) \right) \int_0^1 dx e^{-\epsilon \ln \frac{m^2 + x(1-x)k_E^2}{4\pi\mu^2}} \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

Sviluppando in serie di Taylor l'esponenziale:

$$\begin{aligned} I &= \frac{-i\lambda^2}{32\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} - C + o(\epsilon^2) \right) \int_0^1 dx \left( 1 - \epsilon \ln \frac{m^2 + x(1-x)k_E^2}{4\pi\mu^2} + o(\epsilon^2) \right) = \\ &= \frac{-i\lambda^2}{32\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} - C + o(\epsilon^2) \right) \left( 1 - \epsilon \int_0^1 dx \ln \frac{m^2 + x(1-x)k_E^2}{4\pi\mu^2} + o(\epsilon^2) \right) \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

Svolgendo il prodotto e tenendo solo i termini significativi otteniamo:

$$\begin{aligned} I &= \frac{-i\lambda^2}{32\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} - C - \int_0^1 dx \ln \frac{m^2 + x(1-x)k_E^2}{4\pi\mu^2} \right) + O(\epsilon) = \\ &= \frac{-i\lambda^2}{32\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} - C + \int_0^1 dx \ln \frac{4\pi\mu^2/k_E^2}{\frac{m^2}{k_E^2} + x(1-x)} \right) + O(\epsilon) = \\ &= \frac{-i\lambda^2}{32\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} - C + \ln \frac{4\pi\mu^2}{k_E^2} - \int_0^1 dx \ln \left( \frac{m^2}{k_E^2} - x + x^2 \right) \right) + O(\epsilon) = \\ &\text{facendo la posizione } R(x) = x^2 - x + \frac{m^2}{k_E^2} \\ &= \frac{-i\lambda^2}{32\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} - C + \ln \frac{4\pi\mu^2}{k_E^2} - \ln \frac{m^2}{k_E^2} - \int_0^1 dx \frac{2x^2 - x}{R(x)} \right) + O(\epsilon) = \\ &= \frac{-i\lambda^2}{32\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} - C + \ln \frac{4\pi\mu^2}{m^2} - \int_0^1 dx \frac{2x^2 - x}{R(x)} \right) + O(\epsilon) \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

Nella condizione  $0 < k^2 < 4m^2$ , per la proprietà dell'integrale rimasto, si ottiene

$$I \stackrel{R}{=} \frac{-i\lambda^2}{32\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} - C + \ln \frac{4\pi\mu^2}{m^2} + 2 - \sqrt{\frac{4m^2}{k_E^2} - 1} \operatorname{arccctg} \sqrt{\frac{4m^2}{k_E^2} - 1} \right) + O(\epsilon) \quad (\text{D.25})$$

## D.3 Rinormalizzazione

Attraverso i metodi di regolarizzazione, riusciamo ad isolare le divergenze dal resto dell'espressione. Si può inoltre notare come la parte finita restante dipenda da parametri arbitrari.

L'idea per rimuovere completamente le divergenze, ordine per ordine, nelle teorie perturbative, è abbastanza semplice: è sufficiente alterare le regole di Feynman ad ogni ordine in modo che i risultati restino finiti anche nel limite in cui il metodo di regolarizzazione viene rimosso (ad esempio, per  $\epsilon \rightarrow 0$  nella reg. dimensionale). Sono così introdotti nella teoria dei controtermini, ad-hoc per le nostre esigenze.

Così facendo, modifichiamo anche le Lagrangiane, che assumono il grado di *Lagrangiane rinormalizzate*. Esse sono solo apparentemente identiche a quelle originali: tutte le divergenze sono state riassorbite in parametri arbitrari ma finiti, che è compito degli esperimenti determinare.

## Bibliografia

- [1] **Michael E. Peskin, Daniel V. Schroeder.** *An Introduction to Quantum Field Theory.* Westview Press, 1995.
- [2] **Richard P. Feynman, Albert R. Hibbs.** *Quantum Mechanics and Path Integrals.* McGraw-Hill, 1965.
- [3] **Ian J. R. Aitchison, Anthony J. G. Hey.** *Gauge theories in particle physics.* Institute of Physics Publishing IOP, 2004.
- [4] **Nicola Cabibbo, Luciano Maiani, Omar Benhar.** Dispense delle lezioni di elettrodinamica quantistica, 2007.
- [5] **Richard P. Feynman.** *The Theory of Positrons.* Phys. Rev. **76**, 749-759 – Issue 6, September 1949
- [6] **Richard P. Feynman.** *Space-Time Approach to Quantum Electrodynamics.* Phys. Rev. **76**, 769-789 – Issue 6, September 1949
- [7] **Gian-Carlo Wick.** *The evaluation of the collision matrix.* Phys. Rev. **80**, 268-272 – Issue 2, October 1950
- [8] **Roberto Soldati.** Dispense delle lezioni di teoria dei campi, 2008.
- [9] **Hagen Kleinert.** *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets.* World Scientific Publishing Co., 2004.
- [10] **Julian Schwinger.** *On Quantum-Electrodynamics and the Magnetic Moment of the Electron.* Phys. Rev. **73**, 416-417 – Issue 4, 1948

- [11] **Robert S. Van Dyck, Jr., Paul B. Schwinberg, Hans G. Dehmelt.** *New high-precision comparison of electron and positron  $g$  factors.* Phys. Rev. Lett. **59**, 26-29 – Issue 1, 1987
- [12] **AA. VV.** *History of Original Ideas and Basic Discoveries in Particle Physics.* Proceedings of a NATO ARW held in Erice, Italy, July 27-August 4, 1994. Newman–Ypsilantis Eds., 1996.
- [13] **Robert Serber.** *Linear Modifications in the Maxwell Field Equations.* Phys. Rev. **48**, 49-54 – Issue 1, 1935
- [14] **Edwin A. Uehling.** *Polarization Effects in the Positron Theory.* Phys. Rev. **48**, 55-63 – Issue 1, 1935
- [15] **Lev D. Landau, Evgenij M. Lifšits.** *Teoria Quantistica Relativistica – Fisica teorica 4.* Editori Riuniti – Edizioni Mir, 1975.
- [16] **Sheldon L. Glashow.** *Partial-symmetries of weak interactions.* Nucl. Phys. **22**, 579-588 – Issue 4, February 1961
- [17] **Steven Weinberg.** *A Model of Leptons.* Phys. Rev. Lett. **19**, 1264-1266 – Issue 21, 1967
- [18] **Abdus Salam.** *Proceedings of the 8th Nobel Symposium.* Ed. N. Svartholm (Almqvist and Wiksells, Stockholm) – 1968
- [19] **Sheldon L. Glashow, John Iliopoulos, Luciano Maiani.** *Weak Interactions with Lepton-Hadron Symmetry.* Phys. Rev. D **2**, 1285-1292 – Issue 7, 1970
- [20] **David J. Gross, Frank Wilczek.** *Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories.* Phys. Rev. Lett. **30**, 1343-1346 – Issue 26, 1973
- [21] **David J. Gross, Frank Wilczek.** *Asymptotically Free Gauge Theories.* Phys. Rev. D **8**, 3633-3652 – Issue 10, 1973
- [22] **David H. Politzer.** *Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?* Phys. Rev. Lett. **30**, 1346-1349 – Issue 26, 1973
- [23] **David H. Politzer.** *A Method of Gauge-Invariant Regularization.* Phys. Rep. **14**, 129-180 – Issue 4, 1974
- [24] **Kenneth G. Wilson.** *Confinement of quarks.* Phys. Rev. D **10**, 2445-2459 – Issue 8, 1974

- [25] **John Kogut, Leonard Susskind.** *Hamiltonian formulation of Wilson's lattice gauge theories.* Phys. Rev. D **11**, 395-408 – Issue 2, 1975
- [26] **Michael Creutz.** *Quarks, Gluons and Lattices.* Cambridge University Press – 1983
- [27] **Ludvig D. Faddeev, Victor Popov.** *Feynman diagrams for the Yang-Mills field.* Phys. Lett. B **25**, 29-30 – Issue 1, 1967
- [28] **Jean Letessier, Johann Rafelski.** *Hadrons and Quark-Gluon plasma.* Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology #18, 2002.
- [29] **Richard P. Feynman.** *Very high-energy collisions of Hadrons.* Phys. Rev. Lett. **23**, 1415-1417 – Issue 24, 1969
- [30] **The CTEQ Collaboration.** *Handbook of perturbative QCD.* Rev. Mod. Phys. **67**, 157-248 – Issue 1, 1995
- [31] **William A. Zajc.** *The fluid nature of Quark-Gluon Plasma.* Nucl. Phys. A **805**, 283c-294c – 2008
- [32] **Walter Greiner, Dirk H. Rischke.** *The structure of the Quark-Gluon plasma around the deconfinement transition.* Phys. Rep. **264**, 183-204 – 1996
- [33] **Wolfgang Pauli, Felix Villars.** *On the Invariant Regularization in Relativistic Quantum Theory.* Rev. Mod. Phys. **21**, 434-444 – Issue 3, 1949
- [34] **Gerardus 't Hooft, Martinus J. G. Veltman.** *Regularization and renormalization of gauge fields.* Nucl. Phys. B **44**, 189-213 – 1972
- [35] **Giovanni M. Cicuta, Emilio Montaldi.** *Analytic Renormalization Via Continuous Space Dimension.* Lettere al Nuovo Cimento **4**, #9 – 1972
- [36] **J. F. Ashmore.** *A Method of Gauge-Invariant Regularization.* Lettere al Nuovo Cimento **4**, #8 – 1972